Atividades para sala de aula

- com calculadora científica -

CASIO
EDUCAÇÃO

Atividades para sala de aula

- com calculadora científica -

fx-82LA CW

fx-991LA CW

fx-991LA CW

Boost your Curiosity

CASIO
EDUCAÇÃO

EDITADOR POR:

CASIO BRASIL
Rua Loefgren, 1057 - 3° e 4° andar
Vila Clementino,
São Paulo, SP
www.casioeducacao.com.br
educacao@casio.com.br

COMITÊ EDITORIAL
Ana Cláudia Cossini Martins
Jalman Lima

DESENHO E FORMATAÇÃO

Capa - José Guilherme Muniz
Formatação - Jalman Lima

A Yuriko Yamamoto Baldin,
precursora deste grupo de
professores apaixonados por
calculadoras

Querido(a) professor(a),
É com o coração transbordando de alegria e uma boa dose de orgulho que apresento a você esta coletânea de planos de aula.

Este material é fruto de uma caminhada de mais de dez anos, desenvolvida com muito carinho em parceria com a Casio Educacional e a Unidade Regional de Ensino de José Bonifácio, onde atuo com foco no desenvolvimento do Currículo do Estado de São Paulo e na formação continuada de professores.

Em 2016, começamos a levar as calculadoras científicas para a sala de aula. Desde o início, sabíamos que o objetivo não era apenas realizar cálculos mais rápidos, mas sim promover o pensamento matemático dos estudantes. Queríamos que eles usassem a calculadora como uma ferramenta de raciocínio, não apenas como um instrumento mecânico. Era essencial que a tecnologia estivesse a serviço da aprendizagem, como aliada na construção de ideias, na investigação de padrões e na validação de estratégias.

Foi aí que surgiu o grande desafio: como criar um material que não apenas ensinasse o uso da calculadora, mas que apoiasse o professor na organização do raciocínio dos estudantes, despertasse a curiosidade e desenvolvesse o gosto pela matemática? Assim nasceram os planos de aula que compõem este livro.

Cada proposta foi cuidadosamente construída, com muito estudo, reflexão e pesquisa. Os conceitos são apresentados com intencionalidade pedagógica, a metodologia respeita o tempo e o modo de aprender de cada estudante, e a tecnologia é usada com propósito claro e significativo, sempre em diálogo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os objetivos de aprendizagem e as práticas pedagógicas mais potentes.

Ao longo dos planos, você encontrará sugestões metodológicas, conexões com o cotidiano, situações-problema desafiadoras e orientações para uso da Casio fx-991LA CW como parceira ativa no processo de ensino e aprendizagem. Cada proposta oferece oportunidades reais para desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento algébrico, a modelagem, a argumentação e a resolução de problemas. A calculadora entra como instrumento de investigação, permitindo testar hipóteses, comparar estratégias, explorar regularidades e generalizar ideias, sempre com foco na compreensão e no significado matemático.

Espero que este livro contribua de forma significativa para o seu trabalho em sala de aula. Que ele possa inspirar novas práticas, renovar o encantamento com o ensinar e fortalecer a confiança de que é possível transformar a experiência matemática dos estudantes. A calculadora científica pode — e deve — ser vista como uma aliada poderosa na construção da autonomia intelectual, da criatividade e do pensamento matemático.

Este material foi feito especialmente para você. Use, explore, adapte e compartilhe. A educação se fortalece quando caminhamos juntos.

Ana Claudia Cossini Martins
Professora Especialista em Currículo
Secretaria de Educação de São Paulo

Caro professor(a),

Seja muito bem-vindo(a) a este material, pensado com carinho, cuidado e profundo respeito à sua prática docente. Em nome da CASIO, é uma alegria imensa compartilhar com você este recurso que nasce de anos de estudos, de formações realizadas em diferentes contextos, de trocas valiosas com educadores e, sobretudo, de aplicações reais em sala de aula.

Sabemos que incorporar um novo recurso didático, como a calculadora científica, não é apenas apertar teclas ou seguir manuais: é abrir espaço para novas formas de pensar e ensinar. Esse processo exige esforço e dedicação. De um lado, compreender o funcionamento da tecnologia; de outro, ter em mãos materiais que façam sentido, que dialoguem com o cotidiano da escola e que inspirem os alunos. Este livro foi criado exatamente com esse propósito: apoiar você em sua caminhada, oferecendo um conjunto de problemas contextualizados, cuidadosamente testados e aprimorados, a partir da experiência de seus próprios autores em cenários reais de ensino.

Acreditamos que a tecnologia, quando integrada de maneira consciente, intencional e pedagógica, não substitui o papel do professor, mas o fortalece. Ela amplia possibilidades de aprendizagem, estimula a autonomia dos estudantes, favorece a investigação e abre horizontes para conexões entre matemática, ciência e vida cotidiana.

Mais do que apresentar funções da calculadora, este material é um convite. Um convite à reflexão sobre as práticas de ensino, à experimentação de novas estratégias, ao diálogo com a experiência já acumulada e, principalmente, à construção coletiva de uma educação matemática mais significativa.

Como um dos autores, falo com orgulho: este segundo livro é resultado da dedicação, do tempo e da experiência de muitas mãos que acreditaram nesse projeto. Cada página reflete não apenas teoria, mas prática viva, feita com compromisso, coragem e paixão por ensinar. A todas e todos que contribuíram, deixamos aqui o nosso mais sincero agradecimento.

Desejamos que esta jornada seja, para você, fonte de inspiração e de crescimento. Que cada atividade proposta se transforme em oportunidade de diálogo com seus alunos, em novas descobertas e em aprendizagens que ultrapassem os muros da escola. Estamos juntos, lado a lado, na construção de uma educação matemática mais acessível, reflexiva e conectada com o presente e, acima de tudo, com o futuro.

Boa jornada!

Jalman Lima
Coordenador da Divisão Educativa
CASIO Educação

Assim é este livro

Este livro foi concebido para apoiar o professor no uso da calculadora científica CASIO ClassWiz em sala de aula. Ele combina explicações didáticas, orientações tecnológicas e atividades práticas que permitem ao docente integrar a calculadora de forma natural ao ensino.

Objeto de Conhecimento
Título do Plano

10 Progressões

A lenda de Sissa: o inventor do xadrez

Detalhes da Imagem: Tigela com farinha, grãos e espigas de trigo sobre mesa de madeira

Texto introdutório / Enunciado do problema

Uma antiga lenda sobre o xadrez afirma que o inventor do jogo pediu como compensação ao rei por sua in- ...ão uma quantidade muito grande de grãos de trigo. Quão grande? De fato, pelo pedido não convencional, ...ntidade não parecia tão chamativa a priori. A conta era fácil: um grão de trigo na primeira casa, dois na ...nte, quatro na próxima e assim sucessivamente, duplicando a quantidade anterior, até completar a última

Toda a corte esperava que Sissa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois grãos de trigo pela segunda casa; quatro grãos de trigo pela terceira casa; oito grãos de trigo pela quarta casa e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a casa de número sessenta e quatro (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas). Seu pedido provocou risos. O rei meio que contrariado disse-lhe: "Um invento tão brilhante e um pedido tão simples? Escolha uma grande riqueza meu jovem, um de meus castelos, um palácio ou até uma de minhas mulheres! " Todavia Sissa mostrava-se inapelável à proposta do rei, e, como palavra de rei é palavra de rei, este, ainda contrariado, pediu a seus criados que entregassem a Sissa um grande saco de grãos de trigo. Sissa, entretanto, recusou a oferta dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido, nem um grão a mais, nem um grão a menos. O rei pediu então para que seus calculistas fizessem as contas.

Quantos grãos de trigo exatamente Sissa pediu ao rei?

Questionamentos para pensar com calculadora

Sem utilizar fórmulas, qual o número de grãos de trigo presentes em:

ordem	Grãos de trigo na casa	Grãos de trigo até a casa	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

02 Existe algum padrão numérico para determinar o número de grãos de trigo ou o número de grãos de trigo até a casa x? Se existir, qual é são os padrões numéricos?

03 Quantos grãos de trigo há na trigésima segunda casa? E até a trigésima segunda casa?

1

Página destinada ao estudante

Você encontrará em cada plano comentários pedagógicos, tecnológicos e de conteúdo. Eles foram elaborados para apoiar o desenvolvimento de habilidades e competências da BNCC com o uso da calculadora científica.

10 Progressões
A lenda de Sissa: o inventor do xadrez

Detalhes da Imagem: Conjunto de comprimidos médicos redondos brancos em fundo azul pastel, vista superior.

Uma antiga lenda sobre o xadrez afirma que o inventor do jogo pediu como compensação ao rei por sua invenção uma quantidade muito grande de grãos de trigo. Quão grande? De fato, pelo pedido não convencional, a quantidade não parecia tão chamativa a priori. A conta era fácil: um grão de trigo na primeira casa, dois na seguinte, quatro na próxima e assim sucessivamente, duplicando a quantidade anterior, até completar a última casa.

Toda a corte esperava que Sissa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois grãos de trigo pela segunda casa; quatro grãos de trigo pela terceira casa; oito grãos de trigo pela quarta casa e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a casa de número sessenta e quatro (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas). Seu pedido provocou risos. O rei meio que contrariado disse-lhe: "Um invento tão brilhante e um pedido tão simples? Escolha uma grande riqueza meu jovem, um de meus castelos, um palácio ou até uma de minhas mulheres! " Todavia Sissa mostrava-se inapelável à proposta do rei, e, como palavra de rei é palavra de rei, este, ainda contrariado, pediu a seus criados que entregassem a Sissa um grande saco de grãos de trigo. Sissa, entretanto, recusou a oferta dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido, nem um grão a mais, nem um grão a menos. O rei pediu então para que seus calculistas fizessem as contas.

Quantos grãos de trigo exatamente Sissa pediu ao rei?

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Orientações Didáticas e Técnicas

Comece pela observação do padrão 1, 2, 4, 8... para que a turma verbalize "dobra a cada casa" e generalize $f(x) = 2^{x-1}$; só então formalize $g(x) = S(x) = 2^x - 1$.

Na ClassWiz, ative o separador de dígitos (Config / Sep de Dígitos) e use Tabela para gerar as funções f e g, validando conjecturas antes das fórmulas.

Promova metacognição: peça que expliquem por que $Sn = 2^n - 1$. (argumento 2S – S e onde erros de transporte podem ocorrer..

Conecte PG (razão 2) à função exponencial em domínio discreto

Habilidade BNCC

As habilidades da BNCC definem o que o estudante deve desenvolver no Ensino Médio, orientando aprendizagens essenciais com foco em competências e contextos reais.

Orientações técnicas e didáticas

Incluem-se algumas orientações didáticas e técnicas que se consideraram convenientes para o desenvolvimento da atividade.

01 Sem utilizar fórmulas, qual o número de grãos de trigo presentes em:

ordem	Grãos de trigo na casa	Grãos de trigo até a casa	Adicionando 1
1	$1 = 2^0$	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$
2	$2 = 2^1$	$3 = 2^0 + 2^1$	$4 = 2^2$
3	$4 = 2^2$	$7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$	$8 = 2^3$
4	$8 = 2^3$	$15 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$	$16 = 2^4$

3

Página destinada ao professor

ÍNDICE

CASIO
EDUCAÇÃO

01 Aproximações e erros
Dividir comprimidos: qual é o risco?

Detalhes da Imagem: Conjunto de comprimidos médicos redondos brancos em fundo azul pastel, vista superior.

A um paciente foram prescritos 5 mg diários de um medicamento distribuído em comprimidos de 10 mg. Para consumir a dose adequada, o paciente precisa dividir o comprimido ao meio.

A seguir, estão as massas (em mg) das metades ingeridas durante 10 dias de tratamento, medidas em uma balança analítica (0,01 mg de precisão):

4,55mg	5,84mg	4,06mg	5,63mg	5,49mg
4,08mg	3,99mg	5,71mg	6,01mg	4,25mg

01 Indique, com três algarismos significativos, o valor médio da dosagem diária ingerida pelo paciente nos 10 dias. O paciente está tomando a dose recomendada?

02 Determine os valores máximo e mínimo da dose diária.

03 Considerando a média aritmética, qual é o maior erro absoluto cometido? Qual dosagem apresenta a maior discrepância em relação ao conjunto?

04 Calcule o erro relativo correspondente ao maior erro absoluto.

05 O paciente está realizando o tratamento adequadamente? Justifique.

01 Aproximações e erros
Dividir comprimidos: qual é o risco?

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT316 Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão).

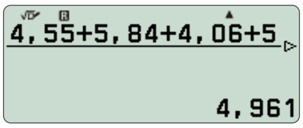
Outras anotações

Orientações Didáticas e Técnicas

Esta atividade trabalha aproximações, arredondamentos e análise de erros em um contexto real de saúde. Permite relacionar cálculos matemáticos ao impacto da divisão incorreta de medicamentos, estimulando reflexão crítica.
Sugestão de uma outra exploração com a ClassWiz:
Inserir os dados no aplicativo Estatística obter média, valor máximo, mínimo, variância e desvio padrão.
Comparar cálculos manuais e os obtidos com a calculadora.
Discutir a influência de valores discrepantes na média e como diferentes números de casas decimais alteram os resultados.
Experimentação prática: Se disponível, utilizar uma balança de precisão para pesar comprimidos partidos, promovendo uma discussão interdisciplinar com Química.

01 Indique, com três algarismos significativos, o valor médio da dosagem diária ingerida pelo paciente nos 10 dias. O paciente está tomando a dose recomendada?

Somando todas as doses e dividindo por 10, obtém-se:



4 , 5 5 + 5 , 8 4
+ 4 , 0 6 + 5 , 6 3
+ 5 , 4 9 + 4 , 0 8
+ 3 , 9 9 + 5 , 7 1
+ 6 , 0 1 + 4 , 2 5
⌄ 1 0 ⬆ EXE

Com três algarismos significativos: **4,96 mg**.
O valor é **ligeiramente inferior** à dose recomendada (5 mg), indicando que, em média, o paciente não está recebendo exatamente a dosagem prescrita.

Para saber mais

É comum a confusão entre "dose" (quantidade de fármaco em uma unidade) e "dosagem" (quantidade administrada em determinado tempo). Essa distinção é fundamental para compreender erros de medicação.

Fonte: Farmacêutico Digital.
Disponível em: farmaceuticodigital.com
Acesso em 30 jan. 2024.

Conexões BNCC

- Incentive os alunos a perceber que a média aritmética é um resumo do conjunto de dados, mas não garante que todas as doses sejam próximas da recomendação.
- Discuta a importância da precisão em contextos de saúde e como pequenas diferenças podem gerar impacto no tratamento.

Ampliação
É interessante que os estudantes explorem, na calculadora, como ficaria a média caso fosse acrescentado uma massa de 0,05g.

02 Determine os valores máximo e mínimo da dose diária.

Mínimo: 3,99 mg
Máximo: 6,01 mg

03 Considerando a média aritmética, qual é o maior erro absoluto cometido? Qual dosagem apresenta a maior discrepância em relação ao conjunto?

Erro Absoluto

O erro absoluto é calculado pela diferença entre o valor obtido na média dos dados e os valores mínimos e máximo obtidos.

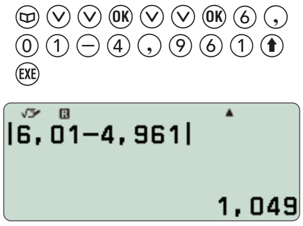
$$\varepsilon = |\bar{x} - x_i|$$

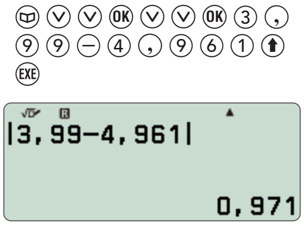
Conexões BNCC

- Aproveite para diferenciar erro absoluto (distância da média) de erro relativo (analisado depois).
- Questione: Se o erro for muito grande, o que isso significa em termos de tratamento?

Para 6,01 mg: |6,01-4,961|=1,049 mg
Para 3,99 mg: |3,99-4,961|=0,971 mg

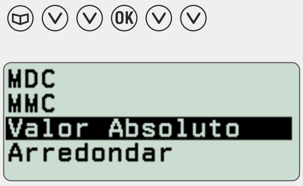
O maior erro absoluto é 1,049 mg, na dose de 6,01 mg.





Função Valor Absoluto (Módulo)

A função Valor Absoluto pode ser encontrada na calculadora através da sequência abaixo



Pressione OK

04 Calcule o erro relativo correspondente ao maior erro absoluto.

Erro Relativo

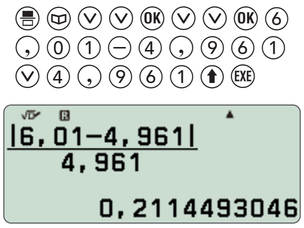
O erro relativo é obtido através do quociente entre o maior erro absoluto e a média dos dados.

$$\varepsilon_r = \frac{|\bar{x} - x_i|}{\bar{x}}$$

Conexões BNCC

- Explique que o erro relativo é adimensional e costuma ser expresso em porcentagem, permitindo comparação entre diferentes situações.
- Explore com os alunos: 21% de diferença em um medicamento é aceitável?

O maior erro relativo correspondente ao maior erro absoluto é



aproximadamente 21,14493046% ou 21,1% com três dígitos significativos.

05 O paciente está realizando o tratamento adequadamente? Justifique.

Não totalmente. Apesar de a média das doses estar próxima de 5 mg, a variação é muito alta (de 3,99 mg até 6,01 mg), gerando erros relativos superiores a 20%. Isso pode comprometer a eficácia do tratamento e até causar riscos à saúde.

Por que isso é importante?

O que pode gerar a dividir um comprimido de forma deliberada? Essa ação pode gerar:
- Dosagens imprecisas (redução ou excesso),
- Riscos à saúde do paciente,
- Comprometimento da eficácia do tratamento.

Um experimento sobre precisão

Objetivo:
Investigar a variação de massa ao dividir comprimidos ao meio, discutindo os conceitos de erro absoluto, erro relativo, algarismos significativos e média aritmética, com uso da calculadora científica.

Materiais necessários:
Comprimidos revestidos (ex: vitamina C efervescente ou similar)
Balança de precisão (0,01 g ou melhor)
Régua milimetrada (opcional)
Estilete ou faca para dividir os comprimidos (com todo o cuidado e supervisão)
Calculadora Casio fx-991LA CW
Papel para registro e tabelas

Procedimento:

Cada grupo de alunos recebe 5 comprimidos iguais.
Os comprimidos devem ser partidos ao meio da melhor forma possível.
Cada metade deve ser pesada separadamente.
Registre os valores em uma tabela.

Calcule:
i) A massa média das metades.
ii) A diferença de massa entre as metades de cada comprimido (erro absoluto).
iii) O erro relativo de cada divisão em relação à metade ideal.
iv) A média dos erros absolutos de todo o grupo.

Extensão interdisciplinar

- Consultar bulas e discutir o que a Anvisa recomenda sobre partir comprimidos.
- Criar gráficos com os dados coletados (histogramas, boxplots).
- Discutir o papel da precisão na indústria farmacêutica.

Discussão sugerida em sala

Os comprimidos foram divididos de forma precisa?

Como a falta de precisão poderia afetar um tratamento real?

Qual seria a vantagem de usar comprimidos já fracionados de fábrica?

A balança foi suficientemente precisa?

02 Aproximações e erros
O número π e aproximações de cálculos

Detalhes da Imagem: Texto cuneiforme sumério antigo e estátua de touro, uma divindade mítica assíria. Contexto histórico sobre o tema das civilizações da Assíria, Mesopotâmia, Babilônia, Interflúvio e Suméria.

A civilização suméria, considerada a mais antiga do mundo, se estabeleceu na Mesopotâmia, onde surgiram as primeiras cidades e monumentos como os zigurates. Entre suas invenções estão a escrita e a roda. Os sumérios utilizavam um sistema numérico que combinava as bases decimal e sexagesimal. Em uma tabuleta de argila encontrada em Susa, registrou-se uma aproximação de π igual a $3 + 1/8$.

Ao longo da história, diferentes civilizações e matemáticos encontraram suas próprias aproximações para o número π. Essa constante matemática, definida como a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro, é uma das mais importantes da Matemática. Tamanha é sua relevância que existe até um dia dedicado à sua comemoração: 14 de março (3/14 nos Estados Unidos), referência aos primeiros dígitos de π (3,14).

Texto produzido por Ana Cláudia Cossini Martins e Jalman Lima

01 O que é o número π ? É um número real? Pode ser posto em forma de fração?

02 Ao resolver um problema que envolve o número π, qual valor aproximado você costuma utilizar?

03 Escreva em notação científica os seguintes valores de π, limitando-se a quatro algarismos significativos 3,14; 22/7; e 3,141592654.

04 Qual é o valor (aproximado) de π mostrado na tela de sua calculadora?

05 Qual o valor (aproximado) de π usado integralmente na sua calculadora? Desenhe uma estratégia para visualizar os dígitos ocultos.

06 Compare as aproximações históricas de π (Egípcios 3,16; Babilônios 3,125; Arquimedes 3,1416; Zu Chongzhi 3,1415929).

a) Calcule o erro relativo em % de cada valor em relação a π usado na sua calculadora.

b) Discuta em quais contextos práticos cada aproximação seria suficiente?

O número π e aproximações de cálculos

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT313 Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro

Outras anotações

Orientações Didáticas e Técnicas

O número π (pi) é uma constante matemática que representa a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Ele pertence ao conjunto dos números reais e é classificado como irracional, pois não pode ser escrito como uma fração exata e possui infinitas casas decimais não periódicas.

Para facilitar cálculos, é comum utilizar aproximações como 3 ou 3,14, de acordo com o nível de precisão necessário.

Sugere-se explorar a história das aproximações de π por diferentes civilizações e promover atividades práticas que relacionem π a objetos do cotidiano. Esse trabalho favorece o pensamento crítico sobre o uso de aproximações e a importância do rigor matemático.

01 O que é o número π ? É um número real? Pode ser posto em forma de fração?

O número π é irracional, ou seja, qualquer valor usado em cálculos é aproximação, logo toda medida ou resultado associado a π sempre envolve erro.

Conexões BNCC

Didático: Esta questão abre espaço para discutir o que significa "um número ser irracional" e como isso afeta cálculos reais.
Reflexão: Estimule os alunos a pensarem: "Se π nunca pode ser escrito exatamente, por que conseguimos calcular áreas e perímetros com tanta precisão?"

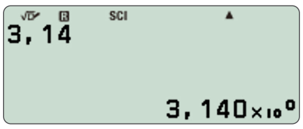
02 Ao resolver um problema que envolve o número π, qual valor aproximado você costuma utilizar?

Pessoal

03 Escreva em notação científica os seguintes valores de π, limitando-se a quatro algarismos significativos 3,14; 22/7; e 3,141592654

3,14 = $3{,}140\times10^{0}$ (4 dígitos significativos)

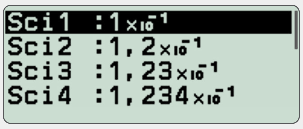
3 , 1 4 ⬆ EXE



Dígitos Significativos

Para configurar a calculadora para mostrar os resultados em notação científica com 4 dígitos significativos, vá em configurações

☰ OK ∨ ∨ OK ∨ OK

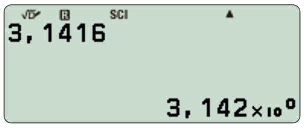


Pressione ∨ ∨ ∨ OK para confirmar.

CASIO EDUCAÇÃO

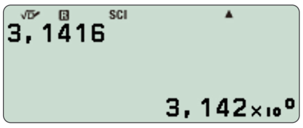
3,1416 = 3,142x10^0 (4 dígitos significativos)

③ , ① ④ ① ⑥ ⬆ EXE



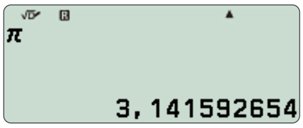
22/7 = 3,143x10^0 (4 dígitos significativos)

③ , ① ④ ① ⑥ ⬆ EXE



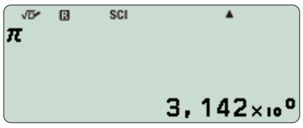
04 Qual é o valor (aproximado) de π mostrado na tela de sua calculadora?

⬆ ⑦ ⬆ EXE



Com 4 dígitos significativos

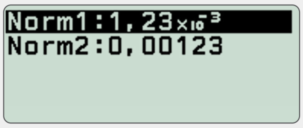
⬆ ⑦ ⬆ EXE



Formato Normal

Para utilizar os formatos de número Normal da calculadora, vá em configuraçõeas

☰ OK ∨ ∨ OK ∨ ∨ OK



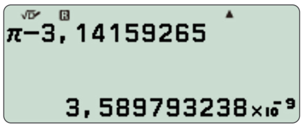
Selecione Norm1 para notação científica para números menores que 10^{-2}.

05 Qual o valor (aproximado) de π usado integralmente a sua calculadora? Desenha uma estratégia para visualizar os dígitos ocultos.

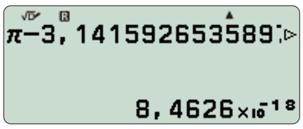
A calculadora faz cálculos internos com 23 dígitos.

Estratégia

Sabendo que o último dígito da calculadora é incerto, vamos subtrair, com exceção do último dígito (algarismo duvidoso).



Dessa forma, sabemos que o último dígito em 3,14159265**4** é na verdade uma aproximação do número 3,141592653**58979323**.



O valor utilizado pela calculadora para o número π é o número 3,14159265358979323846 26.

Conexões BNCC

Que outras estratégias podemos trabalhar com a calculadora?

06 Compare as aproximações históricas de π (Egípcios 3,16; Babilônios 3,125; Arquimedes 3,1416; Zu Chongzhi 3,1415929).

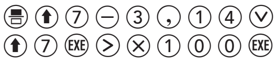
a) Calcule o erro relativo em % de cada valor em relação a π usado na sua calculadora.

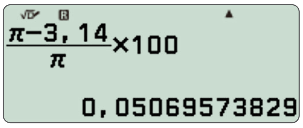
Os valores aproximados de π variaram bastante ao longo da história.
Os egípcios utilizavam o valor 3,16, que apresenta um erro de aproximadamente 0,59% com dois dígitos significativos.

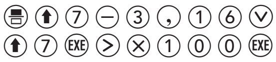
Erro Relativo

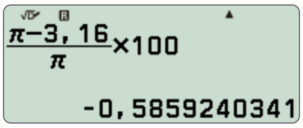
O erro relativo é uma medida que compara a diferença entre um valor aproximado e o valor real (ou de referência), em relação ao próprio valor real. Ele mostra o quanto a aproximação se afasta do valor correto em termos percentuais.
Seja v_r o valor real (ou de referência) e v_a o valor aproximado, o erro relativo ε_r

$$\varepsilon_r = \frac{|v_a - v_r|}{|v_r|}.100\%$$

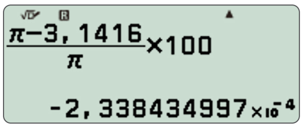




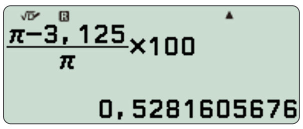




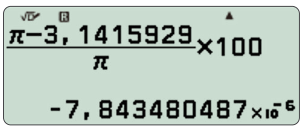
Os egípcios utilizavam o valor 3,16 no lugar de π que apresenta um erro de apenas 0,59%



Arquimedes utilizava o valor 3,1416 no lugar de π que apresenta um erro de apenas 0,00023%



Os Babilônios utilizavam o valor 3,125 no lugar de π que apresenta um erro de apenas 0,53%



Zu Chongzhi utilizava o valor 3,1415929 no lugar de π que apresenta um erro de apenas 0,0000078%

Conexões BNCC

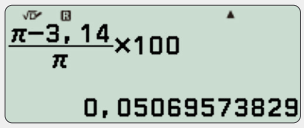
Essa definição ajuda o estudante a perceber que nenhuma medida é exata e que sempre existe uma margem de erro.

O cálculo do erro relativo é uma ótima oportunidade para trabalhar algarismos significativos e adequação de aproximações (BNCC EM13MAT313).

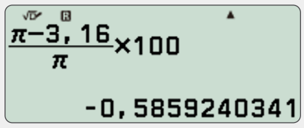
Sugestão didática: peça aos alunos que comparem erros relativos de 3,14; 22/7 e 3,1416 para verem como diferentes aproximações de π impactam os resultados.

Editando um valor

Para substituir um valor de um cálculo já feito, você pode pressionar ◁ para editar um cálculo.



Por exemplo, no cálculo acima para substituir o valor 3,14 pelo valor 3,16.



CASIO
EDUCAÇÃO

03 Análise Combinatória
Qual a melhor aposta?

Detalhes da Imagem: Exibição de bolas de loteria com números.

A Mega-Sena é a modalidade de loteria mais conhecida do Brasil. Para jogar, o apostador escolhe de 6 a 15 números dentre 60 disponíveis no volante. As premiações vão para quem acerta 4, 5 ou 6 dezenas sorteadas — quanto mais números cravados, maior o prêmio. Se preferir, o sistema pode selecionar os números aleatoriamente (Surpresinha) e a mesma aposta pode concorrer em 2, 4 ou 8 concursos seguidos (Teimosinha). Os sorteios acontecem duas vezes por semana, às quartas-feiras e aos sábados.

Um pouco de história

A Mega-Sena foi lançada em 11 de março de 1996, sucedendo a antiga Sena. No primeiro concurso, ninguém levou o prêmio principal; as dezenas foram 04–05–30–33–41–52.

O Paraná registrou o primeiro bilhete premiado já no segundo sorteio.

Desde setembro de 2009 (concurso 1.077), a divulgação passou a identificar também as cidades dos ganhadores e São Paulo lidera o ranking de municípios com mais premiados. O prêmio total na Mega-Sena da virada em 2024 prêmio total foi de R$635.486.165,38. Ao todo, oito apostas acertaram as seis dezenas e dividiram cada uma delas levando R$79.435.770,67:

Dicas finais

Aviso: Loterias são jogos de azar e não há estratégias que garantam acertos.

Texto produzido por Jalman Alves de Lima

01 Escolha seis números dentre as opções abaixo:

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]

Sorteio de seis dezenas entre 01 a 60

02 Após o sorteio, verifque quantas pessoas no seu grupo ou sala acertaram os seis números sorteados. Qual a quantidade de estudantes por número de acertos de 0 a 6?

03 Qual é a distribuição, em percentuais, dos estudantes por número de acertos de 0 a 6?

04 Você ou alguém que você conhece já jogou na Mega-Sena? Saberia explicar como funciona?

05 Qual a probabilidade de acertar na Mega-Sena fazendo apenas um jogo com seis números?

06 Qual a probabilidade de acertar na Mega-Sena fazendo apenas um jogo com 07 números? A chance é maior ou menor do que realizando um jogo com 06 números? Você saberia quantificar?

07 Ajuda! Em qual das seguintes situações teremos melhores chances para ganhar: realizar uma aposta com oito números ou realizar 28 apostas com seis números em cada um?

08 Quantas apostas simples com seis números seriam necessárias para equivaler a uma aposta na MEGA-SENA com 9 números?

09 Qual a probabilidade de com uma aposta simples na MEGASENA (06 números) acertar 05 dos sorteados, ou seja, acertar na quina?

10 Desafio! Qual a probabilidade de com uma aposta na MEGASENA com 07 números acertar 05 dos sorteados, ou seja, acertar na quina?

03 Análise Combinatória
Qual a melhor aposta?

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT312 Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Outras anotações

Orientações Didáticas e Técnicas

Relembre os conceitos de arranjo, permutação e combinação. Em contextos internacionais e na calculadora, temos apenas permutações P(n,r) e combinações C(n,r).

Explique, de forma simples, o que é uma aposta, como realizá-la e por que o valor aumenta conforme a quantidade de dezenas escolhidas.

Ressalte que a probabilidade de ganhar é muito pequena. Os jogos de azar devem ser vistos apenas como entretenimento, nunca como fonte de renda, pois podem gerar sérios problemas pessoais e sociais.

01 Escolha seis números dentre as opções abaixo:

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]

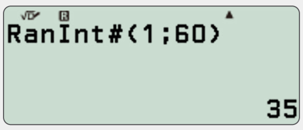
Esta atividade dará uma primeira noção de que as chances de ganhar na Mega-Sena são muito pequenas. Os valores percentuais exemplificarão o quão pequeno é ganhar na Mega-Sena. Os números sorteados na Mega-Sena da virada em 2024 o prêmio total foi de R$635.486.165,38. Ao todo, oito apostas acertaram as seis dezenas e dividiram cada uma delas levando R$79.435.770,67:

50 17 29 57 01 19

Inteiro Aleatório (RanInt#(a,b)

É possível realizar o sorteio na calculadora através da função RandInt# (do inglês Random Integer, Inteiro aleatório/randômico). Para selecionar números inteiros entre 1 e 60, basta pressionar, a sequência abaixo:

∨ OK ∨ ∨ ∨ ∨ OK 1 ⇧) 6 0) EXE



Pressionando EXE, você pode obter outros números aleatórios.

02 Quantas pessoas acertaram os seis números sorteados? Anote a quantidade de pessoas que acertaram cinco, quatro, três, dois, um e nenhum dos números sorteados.

Experimento pessoal.

03 Qual é a distribuição, em percentuais, dos estudantes por número de acertos de 0 a 6?

Experimento pessoal.

03 Você ou alguém que você conhece já jogou na MEGA SENA? Saberia explicar como funciona?

A Mega-Sena é uma das loterias mais populares do Brasil. Nela, o jogador deve escolher de 6 a 15 números entre os 60 disponíveis em um volante de apostas. Os sorteios ocorrem duas vezes por semana, geralmente às quartas e aos sábados. Ganha quem acertar 6 números (sena), mas também há prêmios para quem acerta 5 (quina) ou 4 números (quadra).

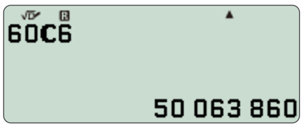
Apesar da diversão envolvida, é importante lembrar que a chance de ganhar é muito pequena — e esse é um excelente gancho para explorar conceitos de probabilidade e combinatória nas aulas de matemática.

05 Qual a probabilidade de acertar na Mega-Sena fazendo apenas um jogo com seis números?

O número de maneiras de escolher 6 elementos de um conjunto de n elementos sem levar em conta a ordem em que são escolhidos é dado por C(60,6).

Na calculadora utilizamos a seguinte notação 60C6

(6) (0) (📖) (∨) (OK) (∨) (∨) (∨) (OK) (6) (EXE)



Na calculadora utilizamos a seguinte notação 60C6. Dessa forma, a probabilidade de acertar na mega-sena apenas com um jogo com seis números, supondo que cada aposta tenha a mesma chance, seria:

número de casos favoráveis: 1
número total de casos possíveis: 60C6.

Probabilidade

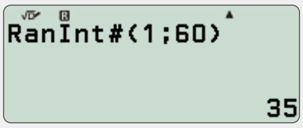
A probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis em um experimento aleatório, desde que todos os casos sejam igualmente prováveis.

$$P(E)=\frac{\text{números de casos favoráveis}}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Combinação nCr

Para utilizar a função combinação na calculadora nCr, siga as orientações a seguir:

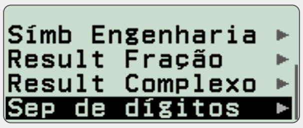
(📖) (∨) (>) (∨) (∨) (∨) (EXE)



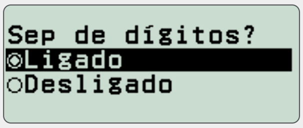
Separador de dígitos

Nas configurações da calculadora, você pode ativar o separador de dígitos

(☰) (>) (∨) (∨) (∨) (∨) (∨) (∨)

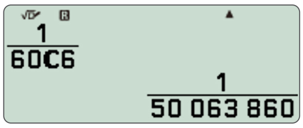


E depois (OK) (OK)

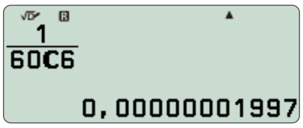


Depois de ativado o separador de dígitos, pressione (⌂) para ir ao menu de aplicativos da calculadora.

⊟ 1 ∨ 6 0 ⊡ ∨ OK
∨ ∨ ∨ OK 6 EXE



⇧ EXE

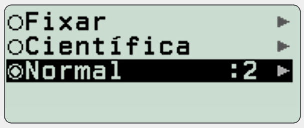


Logo, a probabilidade é 1 : 50.063.860 ou 0,00000001997 ou ainda 0,000001997%

Fomato de Número: Normal 2

Para obter o formato ao lado, é necessário configurar a calculadora para **Normal 2**

≣ OK ∨ ∨ OK ∨ ∨ OK ∨ OK



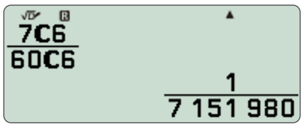
06 Qual a probabilidade de acertar na Mega-Sena fazendo apenas um jogo com 07 números? A chance é maior ou menor do que realizando um jogo com 06 números? Você saberia quantificar?

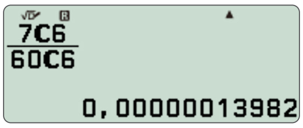
Pela definição, a probabilidade de acertar na Mega-Sena com um jogo com 07 números, temos

número de casos favoráveis: 7C6, ou seja, número de subconjuntos com seis números que podem ser formados a partir de um conjunto com sete números, e neste caso a ordem dos elementos não importa.

número total de casos possíveis: 60C6.

Dessa forma, a probabilidade de acertar na Mega-Sena fazendo apenas um jogo com sete números é





1:7.151.980 ou aproxmadamente 0,00000013982.

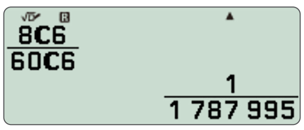
07 Ajuda! Em qual das seguintes situações teremos melhores chances para ganhar: realizar uma aposta com oito números ou realizar 28 apostas com seis números em cada um?

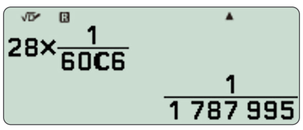
Como o sorteio é feito de forma aleatória e todos os números têm a mesma probabilidade de serem escolhidos. Em ambos os casos, o número total de casos possíveis é o mesmo 60C6. Logo, precisamos comparar o número de casos favoráveis em cada um dos casos. No primeiro caso, temos 8C6

Logo, a probabilidade acertar uma aposta com oito números é igual a probabilidade de fazer 28 apostas com seis números.

⊟ 8 ⊡ ∨ OK ∨ ∨ ∨ OK
6 ∨ 6 0 ⊡ ∨ OK ∨ ∨
∨ OK 6 EXE

2 8 × ⊟ 1 ∨ 6 0 ⊡
∨ OK ∨ ∨ ∨ OK 6 EXE





Logo as duas situações têm a mesma probabiliade para acontecer.

08

Quantas apostas simples com seis números seriam necessárias para equivaler a uma aposta na MEGA-SENA com 9 números?

Numa aposta com 9 números, você está escolhendo todas as combinações possíveis de 6 números dentro desse conjunto de 9. Isso é dado por combinação sem repetição:

Interpretação: a aposta com 9 números “cobre” 84 conjuntos distintos de 6 números — exatamente como fazer 84 apostas simples diferentes.

Conexões BNCC

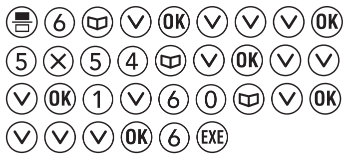
Ampliação rápida
7 números: 7C6=7; 8 números: 8C6=28; 9 números: 9C6=84; 10 números 10C6=210

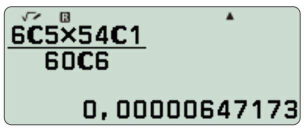
Observação pedagógica: evite associar o resultado a “garantias” de acerto — discuta que mais combinações aumentam a cobertura, mas não garantem ganhar.

09

Qual a probabilidade de com uma aposta simples na MEGASENA (06 números) acertar 05 dos sorteados, ou seja, acertar na quina?

O sorteio tem 6 dezenas dentro 60 (Amostra total= 60C6). Para acertar exatamente 5 dezenas: Escolhem-se 5 das 6 dezenasmarcadas 6C5 e a sexta dezena sorteadanão pode estar entre as marcadas, ou seja, vem das outras 54C1.
Pela regra multiplicativa





CASIO EDUCAÇÃO

Uma viagem númerica ao CERN

Detalhes da Imagem: Foto tirada durante uma visita do CERN

O CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire), localizado na fronteira entre a Suíça e a França, abriga o maior acelerador de partículas do mundo: o Large Hadron Collider (LHC). Este túnel circular de 27 quilômetros de extensão acelera feixes de prótons em sentidos opostos até velocidades impressionantes, que chegam a 299 789 760 metros por segundo, o que corresponde a 99,9999991% da velocidade da luz. Essa diferença representa apenas cerca de 2,7 metros por segundo a menos do que o limite imposto pela relatividade.

No interior do anel, os pacotes de prótons se cruzam a cada 25 nanossegundos, o que gera algo em torno de 600 milhões de colisões por segundo, podendo chegar a quase 1 bilhão em determinados ciclos de operação. Cada colisão libera quantidades enormes de energia em escala subatômica, capazes de reproduzir condições semelhantes às que existiram instantes após o Big Bang.

Para que esses experimentos sejam possíveis, o LHC mantém um ambiente extremo: temperaturas de 1,9 K (cerca de −271 °C), mais frias que o espaço interestelar, e pressões da ordem de 10^{13} atm, tornando o interior do túnel um dos lugares mais frios e mais vazios do universo conhecido. Além disso, milhares de quilômetros de cabos supercondutores formam o sistema de ímãs, que se alinhados poderiam ir e voltar do Sol mais de seis vezes.

Esses números grandiosos mostram como a ciência moderna opera em escalas que desafiam nossa imaginação e evidenciam a importância de representar medidas muito grandes ou muito pequenas de maneira clara e precisa. É nesse contexto que a notação científica se torna uma ferramenta indispensável para organizar, interpretar e comparar essas grandezas, possibilitando uma melhor compreensão da dimensão dos fenômenos estudados.

Texto produzido por Ana Cláudia Cossini Martins e Jalman Lima

01 Os prótons percorrem um túnel de 27 km de extensão, realizando cerca de 11 000 voltas por segundo.
a) Determine a distância percorrida em um minuto.

b) Expresse o resultado em notação científica e indique quantos algarismos significativos fazem sentido. Justifique sua resposta

c) Compare a velocidade obtida com a velocidade da luz (299 792 km/s) e discuta a diferença.

02 A distância média mais precisa da Terra ao Sol é definida como uma Unidade Astronômica (UA), que é exatamente 149.597.870.700 metros.

a) Escreva essa medida em notação científica.

b) A Terra gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com uma excentricidade média de 0,0167. Como resultado, a distância da Terra ao Sol (centro a centro) varia com valores médios de 0,9832899 UA no periélio (mais próximo). Qual o valor em km? Qual o erro ao fazer o cálculo exato em relação com notação científica?

c) Como resultado, a distância da Terra ao Sol (centro a centro) varia com valores médios de 1,0167103 UA no afélio (mais distante). Qual o valor em km? Qual o erro ao fazer o cálculo exato em relação com notação científica?

d) As distâncias médias da órbita dos planetas Mercúrio e Vênus ao Sol, expressas em Unidades Astronômicas (UA), com base em medidas mais precisas são:

Planeta	Distância Planeta ao Sol em UA
Mercúrio	0,387098 UA
Vênus	0,723332 UA

d1) Calcule a distância em km com os valores exatos e com 3 dígitos signifiticativos.

d2) Qual o erro gerado em cada um dos cálculos?

e) As distâncias médias da órbita dos planetas Mercúrio e Vênus ao Sol, expressas em Unidades Astronômicas (UA) com 2 algarismos significativos, com base em medidas mais precisas são:

Planeta	Distância em UA (valores aproximados)
Terra	1 UA
Marte	Entre 1,38 UA (periélio) e 1,67 UA (afélio)
Júpiter	Órbita entre 4,95 UA e 5,45 UA, aproximadamente 5,20 UA em média
Saturno	Entre 9,01 UA e 10,07 UA, média comparável a 9,5 UA
Urano	Entre 18,28 UA e 20,09 UA, média ~19 UA
Netuno	Entre 29,80 UA e 30,32 UA, média ligeiramente acima de 30 UA

e1) Calcule as distâncias com dois algarismos significativos (AS).

e2) Por que seria um erro calcular com um número de algarismos significativos maior do que 2?

04 Notação Científica
Uma viagem númerica ao CERN

Detalhes da Imagem: Foto tirada durante uma visita do CERN

O CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire), localizado na fronteira entre a Suíça e a França, abriga o maior acelerador de partículas do mundo: o Large Hadron Collider (LHC). Este túnel circular de 27 quilômetros de extensão acelera feixes de prótons em sentidos opostos até velocidades impressionantes, que chegam a 299 789 760 metros por segundo, o que corresponde a 99,9999991% da velocidade da luz. Essa diferença representa apenas cerca de 2,7 metros por segundo a menos do que o limite imposto pela relatividade.

No interior do anel, os pacotes de prótons se cruzam a cada 25 nanossegundos, o que gera algo em torno de 600 milhões de colisões por segundo, podendo chegar a quase 1 bilhão em determinados ciclos de operação. Cada colisão libera quantidades enormes de energia em escala subatômica, capazes de reproduzir condições semelhantes às que existiram instantes após o Big Bang.

Para que esses experimentos sejam possíveis, o LHC mantém um ambiente extremo: temperaturas de 1,9 K (cerca de −271 °C), mais frias que o espaço interestelar, e pressões da ordem de 10^{13} atm, tornando o interior do túnel um dos lugares mais frios e mais vazios do universo conhecido. Além disso, milhares de quilômetros de cabos supercondutores formam o sistema de ímãs, que se alinhados poderiam ir e voltar do Sol mais de seis vezes.

Esses números grandiosos mostram como a ciência moderna opera em escalas que desafiam nossa imaginação e evidenciam a importância de representar medidas muito grandes ou muito pequenas de maneira clara e precisa. É nesse contexto que a notação científica se torna uma ferramenta indispensável para organizar, interpretar e comparar essas grandezas, possibilitando uma melhor compreensão da dimensão dos fenômenos estudados.

Texto produzido por Ana Cláudia Cossini Martins e Jalman Lima

Calculadora científica fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT313 Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro

Orientações Didáticas e Técnicas

Mostre que a notação científica é essencial para lidar com números muito grandes ou pequenos, como distâncias em UA. Trabalhe a identificação de algarismos significativos e destaque que alguns dígitos são duvidosos. Explique que toda medida envolve erro ou incerteza, seja por limitações instrumentais ou variações naturais (periélio/afélio).

Estimule comparações entre valores aproximados e exatos, discutindo quando arredondar. Incentive os estudantes a justificar suas escolhas de escrita numérica e refletir sobre a plausibilidade dos resultados. Use exemplos reais para dar sentido aos cálculos e reforçar que a clareza na representação é tão importante quanto o resultado obtido.

01 Os prótons percorrem um túnel de 27 km de extensão, realizando cerca de 11 000 voltas por segundo.

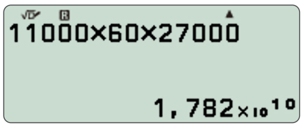
a) Determine a distância percorrida em um minuto.

Dados do enunciado

Comprimento do túnel (circunferência): C = 27 000m
Nº de voltas por segundo: f = 11000voltas/s
Tempo considerado: t = 1min = 60s

Vamos denotar d, a distância percorrida e N, o número total de voltas em 1 minuto. Logo $N = f \times t$

Então, a distância percorrida d é dada por $d = f \times t \times C$



A distância percorrida pelos prótons em um minuto é de $1{,}782 \times 10^{10}$m, ou seja, equivalente a 17,82 bilhões de metros.

b) Expresse o resultado em notação científica e indique quantos algarismos significativos fazem sentido. Justifique sua resposta

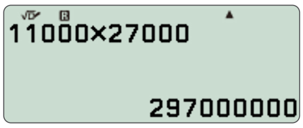
A distância percorrida pelos prótons em um minuto é de $1{,}782 \times 10^{10}$m.

Como os dados do enunciado têm baixa precisão: "27 km", então usualmente interpretado com 2 algarismos significativos (27). A expressão "cerca de 11 000 voltas/s", logo a expressão "cerca de" indica valor aproximado; sem ponto decimal ou notação científica, tratamos como ≈ 2 algarismos significativos. Para "1 minuto = 60 s" pode ser considerado exato na escala do problema

O resultado deve respeitar o menor número de algarismos significativos entre os dados. Portanto, expressamos d com 2 algarismos significativos.

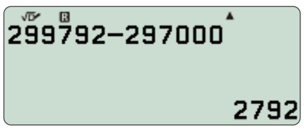
c) Compare a velocidade obtida com a velocidade da luz (299 792 km/s) e discuta a diferença.

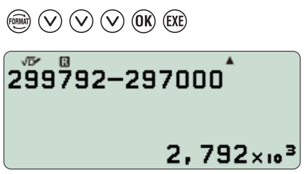
Velocidade estimada a partir do enunciado $v = f \times C$.



Logo, a velocidade v=297000km/s.

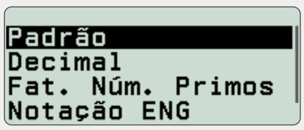
A velocidade da luz dada c= 299792km/s, logo a diferença absoluta é dada por:





Tecla FORMAT

Você pode usar o menu FORMAT que aparece quando você pressiona a tecla para converter um resultado de cálculo exibido para outros formatos

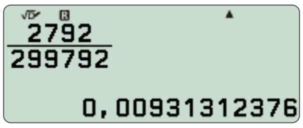


Logo, a diferença absoluta é dada por

$2{,}792 \times 10^3$km/s ou $2{,}792 \times 10^6$m/s.

A diferença relativa (aproximada) é dada por:

⊟ ② ⑦ ⑨ ② ⓥ ② ⑨ ⑨
⑦ ⑨ ② ⬆ EXE



ou seja, 0,93%, com 2 dígitos significativos.

Notação ENG

A notação ENG presente no menu FORMAT permite o formato $a \times 10^n$, n = expoente divisível por 3.

Ao entrar no modo de Conversão ENG, o resultado do cáculo é convertido em notação de engenharia e fará com que setas apareçam a direita do cálculo.

No modo Conversão ENG, você pode usar ⊳ e ⊲ para mudar o ponto decimal da mantissa.

Conexões BNCC

Essa diferença de ~0,9 % é grande se comparada ao que acontece no LHC real, mas coerente com a grosseria dos dados do exercício ("27 km" e "cerca de 11 000 voltas/s"). Em problemas de divulgação científica, valores arredondados achatam o resultado.

Didaticamente, é ótimo para mostrar que arredondamentos nas entradas propagam-se para as saídas.

Se quisermos uma comparação física mais fiel, precisaríamos de valores mais precisos para o perímetro do anel e para as voltas por segundo; aí a diferença para c cai para uma fração minúscula (ordem de 10^{-8} a 10^{-9} de c), o que reforça a discussão sobre ordem de grandeza e algarismos significativos.

02 A distância média mais precisa da Terra ao Sol é definida como uma Unidade Astronômica (UA), que é exatamente 149.597.870.700 metros.

a) Escreva essa medida em notação científica.

A UA é exata por definição:

149 597 870 700 m = $1{,}495978707 \times 10^{11}$ m.

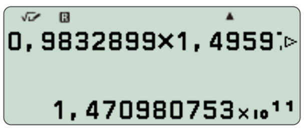
Logo 1 UA = $1{,}495978707 \times 10^{11}$ m.

Conexões BNCC

Escrever em notação científica não introduz erro se mantivermos todos os dígitos ($1{,}495978707 \times 10^{11}$). O erro aparece apenas quando arredondamos o coeficiente (por exemplo, $1{,}496 \times 10^{11}$)

b) A Terra gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com uma excentricidade média de 0,0167. Como resultado, a distância da Terra ao Sol (centro a centro) varia com valores médios de 0,9832899 UA no periélio (mais próximo). Qual o valor em km? Qual o erro ao fazer o cálculo exato em relação com notação científica?

Periélio médio 0,9832899 UA em km e erro por arredondamento, conversão "exata" (respeitando a definição da UA) $d_{perielio} = 0{,}9832899 \times 1{,}495\,978\,707 \times 10^{11} = 1{,}4709807532081593 \times 10^{8}$ km.



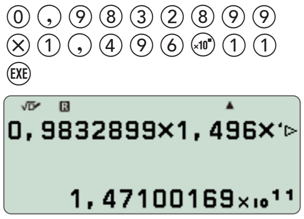
Como a UA é exata, quem limita os dígitos do resultado é o fator 0,9832899 (7 a.s.). Logo, relatar o resultado com 7 algarismos significativos é adequado.

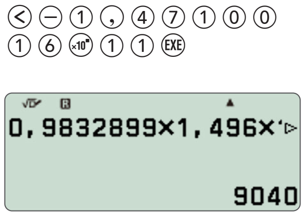
$$d_{perielio} = 0{,}9832899 \times 1{,}495\,978\,707 \times 10^{11} = 1{,}4709807532081593 \times 10^{8} \text{ km.}$$

Depende de como você escreve a UA em notação científica. Se usar todos os dígitos ($1{,}495978707 \times 10^{11}$ m), o erro é zero. Se arredondar o coeficiente, surge erro.

Vejamos dois cenários típicos:

1 UA ~ $1{,}496 \times 10^{11}$ m = $1{,}47100169040 \times 10^{8}$ km





c) Como resultado, a distância da Terra ao Sol (centro a centro) varia com valores médios de 1,0167103 UA no afélio (mais distante). Qual o valor em km? Qual o erro ao fazer o cálculo exato em relação com notação científica?

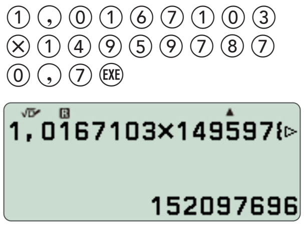
Definição exata:

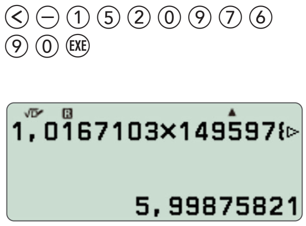
$$1 \text{ UA} = 149\,597\,870\,700 \text{ m} = 149\,597\,870{,}7 \text{ km} = 1{,}495978707 \times 10^{8} \text{ km (valor exato).}$$

1 UA ~ $1{,}496 \times 10^{11}$ m = $1{,}47100169040 \times 10^{8}$ km
Fator do afélio: 1,0167103 (8 a.s.).

Conversão "exata" (usando a UA exata, sem arredondar o coeficiente)

$d_{afelio} = 1{,}0167103 \times 149\,597\,870{,}7$ km





Logo, dafelio = 152 097 695,99875821 km.

Como o fator tem 8 algarismos significativos, reportamos o resultado com 8 a.s.:

A UA é exata. Quem limita a precisão do produto é o fator 1,0167103 (8 a.s.). Usar notação científica com todos os dígitos não gera erro; o erro surge apenas se arredondarmos o coeficiente.

d) As distâncias médias da órbita dos planetas Mercúrio e Vênus ao Sol, expressas em Unidades Astronômicas (UA), com base em medidas mais precisas são:

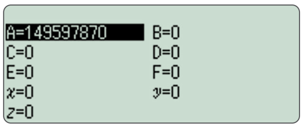
Planeta	Distância Planeta ao Sol em UA
Mercúrio	0,387098 UA
Vênus	0,723332 UA

CASIO EDUCAÇÃO

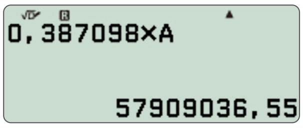
d1) Calcule a distância em km com os valores exatos e com 3 dígitos significativos.

$d_{mercurio}$ = 0,387098 × 149 579 870,7

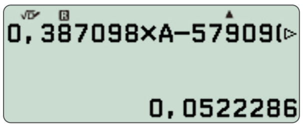
[VAR] 1 4 9 5 9 7 8 7
0 , 7 EXE



0 , 3 8 7 0 9 8 ×
⇧ 4 EXE



− 5 7 9 0 9 0 3 6
, 5 EXE



Logo $d_{mercurio}$ = 57 909 036,5522286 km

Com 6 a.s. (coerente com 0,387098):

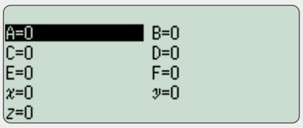
$d_{mercurio}$ = 57 909 000 km (6.a.s.)

Igualmente,

d_{venus} = 108 208 927,0091726 km ou
d_{venus} = 108 209 000km (6 a.s.).

Variável [VAR]

Quando você for reutilizar um valor de forma recorrente, utilize a tecla [VAR]



Digite o valor na variável desejável. Para utilizar a variável A, pressione ⇧ 4, por exemplo.

Conexões BNCC

Como a UA é exata, a limitação da precisão do resultado vem do fator orbital (0,387098 e 0,723332).

Mostrar as duas versões (6 a.s. e 3 a.s.) é ótimo para discutir perda de informação ao reduzir algarismos significativos e para praticar arredondamento correto.

d2) Qual o erro gerado em cada um dos cálculos?

Mercúrio — 0,387098 UA

Referência (UA exata)
$d_{mercurio}$ = 0,387098 × A = 57 909 036,5522286 km

Arredondado para 6 a.s. (coerente com 0,387098):
$5{,}79090 \times 10^7$ km = 57 909 000 km
Erro absoluto: 36,55 km (subestima).
Erro relativo: 0,0000631%

Arredondado para 3 a.s.:
$5{,}79 \times 10^7$ km = 57 900 000 km
Erro absoluto: 9 036,55 km (subestima).
Erro relativo: 0,0156%

Com 6 a.s., o erro cai para dezenas de km; com 3 a.s., sobe para milhares de km. O limitante é o número de algarismos significativos que você decide manter no resultado.

Vênus — 0,723332 UA

Referência exata (UA exata)
dvenus = 0,723332 × A km = 108 208 927, 0091724 km

Arredondado para 6 a.s. (coerente com 0,723332):
$1,08209 \times 10^8$ km = 108 209 000 km
Erro absoluto: 72,99 km (subestima).
Erro relativo: 0,0000675%

Arredondado para 3 a.s.:
$1,08 \times 10^8$ km = 108 000 000 km

Erro absoluto: 208 927,01 km (subestima).
Erro relativo: 0,193%

Com 6 a.s., o erro cai para dezenas de km; com 3 a.s., sobe para milhares de km. O limitante é o número de algarismos significativos que você decide manter no resultado.

e) As distâncias médias da órbita dos planetas Mercúrio e Vênus ao Sol, expressas em Unidades Astronômicas (UA) com 2 algarismos significativos, com base em medidas mais precisas são:

Planeta	Distância em UA (valores aproximados)
Terra	1 UA
Marte	Entre 1,38 UA (periélio) e 1,67 UA (afélio)
Júpiter	Órbita entre 4,95 UA e 5,45 UA, aproximadamente 5,20 UA em média
Saturno	Entre 9,01 UA e 10,07 UA, média comparável a 9,5 UA
Urano	Entre 18,28 UA e 20,09 UA, média ~19 UA
Netuno	Entre 29,80 UA e 30,32 UA, média ligeiramente acima de 30 UA

e1) Calcule as distâncias com dois algarismos significativos (AS).

e2) Por que seria um erro calcular com um número de algarismos significativos maior do que 2?

e1) 2 AS, usando 1 UA = $1,495978707 \times 10^8$ km)

Terra: $1,5 \times 10^8$ km
Marte: periélio $2,1 \times 10^8$ km; afélio $2,5 \times 10^8$ km
Júpiter: $7,5 \times 10^8$– $8,2 \times 10^8$ km (média $7,8 \times 10^8$ km)
Saturno: $1,3 \times 10^9$ – $1,5 \times 10^9$ km (média $1,4 \times 10^9$ km)
Urano: $2,7 \times 10^9$ – $3,0 \times 10^9$ km (média $2,8 \times 10^9$ km)
Netuno: ≈ $4,5 \times 10^9$ km

e2) Porque as entradas estão dadas com 2 algarismos significativos; usar mais no resultado criaria falsa precisão (o resultado não pode ter mais AS do que o dado menos preciso).

05 Regularidades numéricas
Tabela multiplicativa e regularidades

A tabela abaixo apresenta interessantes relações entre os números. Podemos analisar as sequências de números na diagonal principal que é formada por uma sucessão de quadrados 1, 4, 9, 16, 25 ... e também os números localizados no formato de L-invertido, formado por linhas e colunas.

Por exemplo, L-invetido(2) é formado pela sequência {2, 4, 2}.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	84	98	112	126	140	154	168	182	196	225

01 Faça a soma dos números contidos em cada régua em formato L invertido conforme a tabela abaixo:

Tabela dos elementos selecionados na Tábua de Multiplicação

ordem (n)	Soma dos elementos L-invertido(n)	Resultado da soma
1	1	
2	2+4+2	
3	3+6+9+6+3	
4	4+8+12+16+12+8+4	
5		
6		

02 É possível perceber alguma regularidade nas somas? Seria possível determinar a soma dos valores de uma linha, sem identificar os elementos da linha? Se afirmativo, qual seria essa regularidade? Descreva como você percebeu o padrão.

03

Em uma linha a soma dos elementos do L-invertido é 3375, qual é a ordem desta linha? Como foi a estratégia utilizada?

04

Observe os números L-invertido(5) em destaque:

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

a) Qual é a soma da linha L-invertido(5)?
Utilize duas estratégias.

b) Qual é a soma da linha L-invertido(16)?
Utilize duas estratégias.

05

Observe os números L-invertido(5) em destaque:

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

a) Calcule os elementos da tabela ao lado

b) É possível obter a soma da tabela 15x15?

05 Regularidades numéricas
Tabela multiplicativa e regularidades

A tabela abaixo apresenta interessantes relações entre os números. Podemos analisar as sequências de números na diagonal principal que é formada por uma sucessão de quadrados 1, 4, 9, 16, 25 ... e também os números localizados no formato de L-invertido, formado por linhas e colunas.

Por exemplo, L-invetido(2) é formado pela sequência {2, 4, 2}.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	84	98	112	126	140	154	168	182	196	225

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Outras anotações

Orientações Didáticas e Técnicas

Esta atividade convida os estudantes a descobrir padrões em uma tabela de multiplicação e generalizar os resultados. O uso da ClassWiz é essencial para explorar somatórios e verificar conjecturas de forma ágil, favorecendo o **desenvolvimento do pensamento algébrico**.

Use a **função Somatório** (Calcular) para calcular somas de progressões.

Estimule os estudantes a explicarem como identificaram o padrão (metacognição), não apenas o resultado.
Aproveite o aplicativo **Tabela** da calculadora para listar rapidamente valores e comparar com sequências conhecidas (ex.: cubos perfeitos).

01 Faça a soma dos números contidos em cada régua em formato L-invertido conforme a tabela abaixo:

Tabela dos elementos selecionados na Tábua de Multiplicação

ordem (n)	Soma dos elementos L-invertido(n)	Resultado da soma
1	1	1
2	2+4+2	8
3	3+6+9+6+3	27
4	4+8+12+16+12+8+4	64
5	5+10+15+20+25+15+10+5	125
6	6+12+18+24+30+36+30+24+18+12+6	216

02 É possível perceber alguma regularidade nas somas? Seria possível determinar a soma dos valores de uma linha, sem identificar os elementos da linha? Se afirmativo, qual seria essa regularidade?

Sim, é possível identificar a regularidade na soma dos elementos. Para n, a soma dos elementos da n-ésimo L-invertido é dado por n^3.

De fato, observando as somas observamos um padrão, as somas correspondem a cubos perfeitos:: $1 = 1^3$; $8 = 2^3$; $27=3^3$; $64=4^3$; ...

Conexões BNCC

Que padrão aparece nessas somas? Orientação: Os alunos devem perceber que os resultados são cubos perfeitos (1^3, 2^3, 3^3, 4^3...).

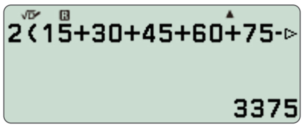
03 Em uma linha a soma dos elementos do L-invertido é 3375, qual é a ordem desta linha? Como foi a estratégia utilizada?

Estratégia 01: Obter a soma de cada L-invertidos e encontrar aquele cuja soma seja 3375.

Estratégia 01 (aperfeiçoado): Obter a soma de cada L-invertidos e encontrar aquele cuja soma seja 3375 e observar que a soma do 15° L-invertido é dada por:

$$2(15 + 30 + 45 + ... + 210 + 225) - 225 = 3375$$

2 (1 5 + 3 0 + 4 5 + 6 0 + 7 5 + 9 0 +
1 0 5 + 1 2 0 + 1 3 5 + 1 5 0 + 1 6 5 +
1 8 0 + 1 9 5 + 2 1 0 + 2 2 5) − 2 2 5 EXE



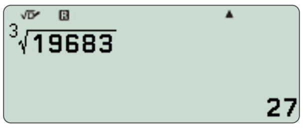
Estratégia 02: Obter a soma através do padrão numérico

∛ 3 ▷ 3 3 7 5 EXE

A ordem do L-invertido cuja soma é 3375 é a décima quinta.

03 Em uma linha a soma dos elementos do L-invertido é 3375, qual é a ordem desta linha? Como foi a estratégia utilizada?

∛ 3 ▷ 1 9 6 8 3 EXE



A ordem do L-invertido cuja soma é 3375 é a décima quinta.

04

Observe os números L-invertido(5) em destaque:

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

a) Qual é a soma da linha L-invertido(5)? Utilize três estratégias.

Estratégia 01: Obter a soma 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5 = 125

Estratégia 02: Padrão numérico Soma (L-invertido(5)) = 5^3.

Estratégia 03: Soma de duas progressões aritméticas
Uma maneira de se obter a soma dessa sequência é a exploração da soma de Progressões aritméticas. Vamos tomar como exemplo a sequência

$$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5$$

Primeiro identificamos as duas séries distintas nesta sequência: $S_1 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25$ é a soma de uma Progressão Aritmética de razão 5, cujo primeiro termo é 5 e o último termo é 25; $S_2 = 20 + 15 + 10 + 5 = 5 + 10 + 15 + 20$ é a soma de uma Progressão Aritmética de razão 5, cujo primeiro termo é 5 e o último termo é 20, ou, $S_2 = S_1 - 5^2$.

A soma das sequências pode ser obtida, pela soma dos extremos:

Somando as somas S_1 e S_2, temos: Soma (L-invertido)(5) = $S_1+S_2 = 2S_1-25 = 125$.

b) Escreva uma expressão matemática para obter a soma da linha L-invertido(5).

f(x) Notação Somatório

Ao resolver somas muito extensas, como as que aparecem nas réguas em "L" ou em tabelas maiores, escrever todos os termos se torna trabalhoso e pouco prático. Surge, então, a necessidade de uma forma mais compacta de representar essas somas.

É nesse contexto que entra o somatório (∑), um símbolo que permite escrever de maneira simples e organizada o cálculo de várias parcelas de uma sequência. Além de facilitar a escrita, o somatório é amplamente utilizado em Matemática, ciências naturais e computação para representar padrões de adição de forma clara e eficiente.

O somatório, representado pela letra grega sigma (∑), é uma forma simbólica de indicar a adição de vários termos de uma sequência numérica.

Ele serve para escrever de maneira compacta operações que, de outro modo, ficariam muito longas. Por exemplo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

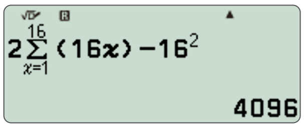
pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

onde: i é o índice da soma, 1 é o valor inicial, 5 é o valor final, e termo da sequência é o próprio i.

Estratégia 01: Obter a soma

2 [CATALOG] OK ∨ ∨ OK 1 6 x
∨ 1 ∧ 1 6 > > > >
> − 1 6 [x²] EXE



Estratégia 02: Padrão numérico Soma (L-invertido(16)) = 16^3.

Somatório

Na calculadora, a função somatório está no Catálogo

[CATALOG] > ∨ ∨ OK

05

Observe os números L-invertido(5) em destaque:

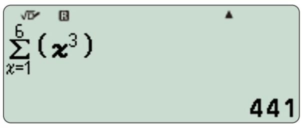
1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

a) Calcule a soma dos elementos da tabela ao lado

A soma dos elementos da tabela ao lado é dado por

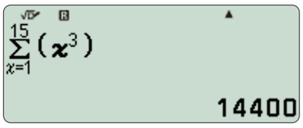
$L(1) + L(2) + L(3) + ... + L(6) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 6^3.$

[CATALOG] OK ∨ ∨ OK x [x■] 3 ∨
1 ∧ 6 EXE



b) É possível obter a soma da tabela 15x15?

A soma dos elementos da tabela 15x15 é



06 Regularidades numéricas
Torre de números ímpares

O Triângulo de Pascal é uma disposição triangular de números binomiais, onde cada número é a soma dos dois números diretamente acima dele na linha anterior. Ele é nomeado em homenagem ao matemático francês Blaise Pascal, embora já fosse conhecido por matemáticos chineses e persas antes dele. Algumas propriedades numéricas do triângulo de Pascal são as seguintes:

A segunda diagonal é formada pelos números naturais:
1, 2, 3, 4, 5,.. ·

A terceira diagonal é formada por números triangulares:
1, 3, 6, 10, ... ·

A soma das linhas corresponde as potências de 2:
2, 4, 8, 16, 32, ...

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

01 Observe a seguinte pirâmide de números abaixo. Determine a soma de cada uma das 10 primeiras linhas da pirâmide de números ímpares.

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29

02 Considere a diagonal (1, 3, 7, 13, 21, ...). Seja f que representa a sequência acima, ou seja, $f(1) = 1$; $f(2) = 3$; $f(3) = 7$; $f(4) = 13$, ...?

a) Seria possível que f seja uma função afim? Justifique sua resposta.

b) Seria possível que f seja uma função quadrática? Justique sua resposta.

c) Determine a função f e construa uma tabela com os primeiros 30 termos da sequência e represente graficamente.

03 Considere a diagonal (1, 5, 11, 19, 29, ...).Seja g que representa a sequência acima, ou seja, $g(1) = 1$; $g(2) = 5$; $g(3) = 11$; $g(4) = 19$, ...?

a) Seria possível que g seja uma função afim? Justifique sua resposta.

b) Seria possível que g seja uma função quadrática? Justique sua resposta.

c) Determine a função g e construa uma tabela com os primeiros 30 termos da sequência e represente graficamente.

04 Qual é o número que ocupa a posição central da 7ª linha da pirâmide de números ímpares? Que estratégia você usou para perceber o padrão? De que outra forma poderia confirmar sua resposta?

06 Regularidades numéricas
Torre de números ímpares

O Triângulo de Pascal é uma disposição triangular de números binomiais, onde cada número é a soma dos dois números diretamente acima dele na linha anterior. Ele é nomeado em homenagem ao matemático francês Blaise Pascal, embora já fosse conhecido por matemáticos chineses e persas antes dele. Algumas propriedades numéricas do triângulo de Pascal são as seguintes:

A segunda diagonal é formada pelos números naturais:
1, 2, 3, 4, 5,.. .

A terceira diagonal é formada por números triangulares:
1, 3, 6, 10, ...

A soma das linhas corresponde as potências de 2:
2, 4, 8, 16, 32, ...

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Calculadora científica fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT502 Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Orientações Didáticas e Técnicas

O objetivo é desenvolver a capacidade de conjecturar e validar padrões algébricos. Os estudantes vão comparar sequências que são quadráticas com outras que não são, entendendo por que a forma $y=ax^2$ nem sempre se aplica.

Estimule os alunos a calcular manualmente os primeiros termos antes de generalizar, criando a necessidade da fórmula.

Incentive explicações metacognitivas: como encontraram o padrão, como poderiam confirmar.

Reforce que pensar com a calculadora significa explorar, conjecturar e validar ideias matemáticas.

01 Observe a seguinte pirâmide de números abaixo. Determine a soma de cada uma das 10 primeiras linhas da pirâmide de números ímpares.

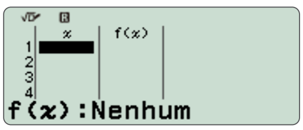
1				
3	5			
7	9	11		
13	15	17	19	
21	23	25	27	29

Estratégia 01: Determinar todos os elementos e calcular a soma de cada uma das 10 primeiras linhas.

Estratégia 02: Soma (L1) = 1; Soma (L2) = 8 = 2^3; Soma(L3) = 27 = 3^3, ..., ou seja Soma(Ln) = n^3.

Vamos criar uma tabela de valores para a função $f(x)= x^3$ com x=1, 2, ... , 10. No aplicativo Tabela, temos:

OK



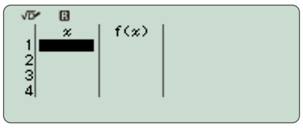
Conexões BNCC

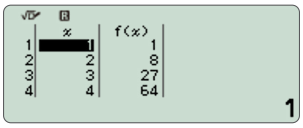
O objetivo é desenvolver a capacidade de conjecturar e validar padrões algébricos. Os estudantes vão comparar sequências que são quadráticas com outras que não são, entendendo por que a forma $y = ax^2$ nem sempre se aplica.

Vamos definir $f(x)= x^3$ e criar uma tabela de valores x=1, 2, 3, ... , 10.

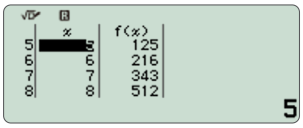
(⋯) (∨) (OK) (OK) (x) (■²) (3) (EXE)

(⋯) (OK) (1) (EXE) (1) (0) (EXE) (1) (EXE) (EXE)

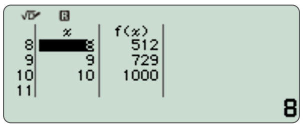




(⩔)



(⩔)



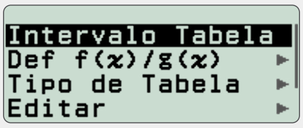
Os valores da soma de cada uma das linhas são 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 e 1000.

Tipo de Tabela f(x)

No aplicativo Tabela, você pode customizar para aparecer as colunas $f(x)$, $g(x)$ e o tipo $f(x)$ / $g(x)$.

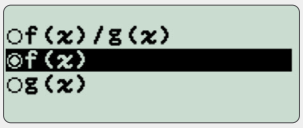
No exemplo ao lado, definimos para mostrar apenas $f(x)$. No aplicativo Tabela, pressione

(⋯)



Pressione

(∨) (∨) (OK) (∨) (OK)



Pressione (↩) para voltar para a Tabela.

02 Considere a diagonal (1, 3, 7, 13, 21, ...). Seja f que representa a sequência acima, ou seja, $f(1) = 1$; $f(2) = 3$; $f(3) = 7$; $f(4) = 13$, ...?

a) Seria possível que f seja uma função afim? Justifique sua resposta.

Se fosse possível que f fosse uma função afim, então $f(x) = ax+b$. Dessa forma, teríamos

$$1 = f(1) = a.1 + b,\ \ 3 = f(2) = a.2 + b,\ \ 7 = f(3) = a.3 + b,\ \ 13 = f(4) = a.4 + b,$$

Dessa forma, vemos que não podemos encontrar valores para a e b que satisfaça todas as equações acima. Logo não é possível que f seja uma função afim.

b) Seria possível que f seja uma função quadrática? Justique sua resposta.

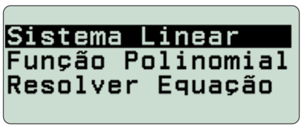
Se fosse possível que f fosse uma função afim, então $f(x) = ax^2+bx+c$. Dessa forma, teríamos

$$1 = f(1) = a.1 + b.1 + c,\ \ 3 = f(2) = a.2^2 + b.2 + c,\ \ 7 = f(3) = a.3^2 + b.3 + c\ ,\ \ 13 = f(4) = a.4^2 + b.4 + c,$$

Dessa forma, utilizando o aplicativo Equação/Sistema Linear para resolver as equações acima, encontramos que a=1, b=-1 e c=1.

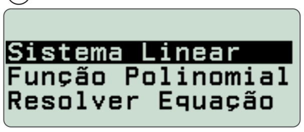
(OK) (∨)

(OK)

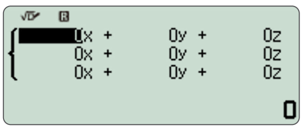


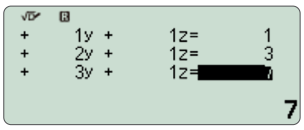
(OK)

(OK)



(1) (EXE) (1) (EXE) (1) (EXE) (1) (EXE) (2)
(■²) (EXE) (2) (EXE) (1) (EXE) (3) (EXE) (3)
(■²) (EXE) (3) (EXE) (1) (EXE) (7) (EXE)





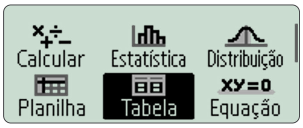
OK

OK

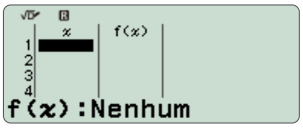
OK

Vemos que a função $f(x)=x^2-x+1$ satisfaz as demais equações, logo f é a função procurada.

Vamos criar uma tabela de valores para a função $f(x)= x^2-x+1$ com x=1, 2, ... , 30. No aplicativo Tabela, temos:

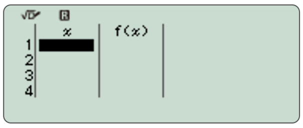


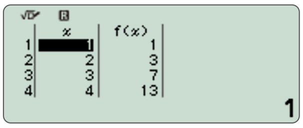
OK



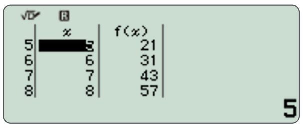
MENU ∨ OK OK x x^2 − x + 1 OK

MENU OK 1 EXE 3 0 EXE 1 EXE EXE

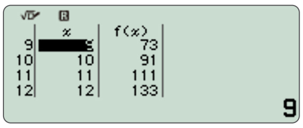




⩔



⩔



SHIFT x

Explorar Gráficos - QR Code SHIFT x

No aplicativo Tabela, você pode usar a função QR via SHIFT x para gerar um QR Code, ler com um leitor de QR Code no smartphone ou tablets para visualizar o gráfico da função no ClassPad.net (serviço de aprendizado baseado na nuvem para a extensão da ClassWiz)

Pressione após definir uma função no aplicativo Tabela da calculadora e na tabela de valores, pressione SHIFT x

03 Considere a diagonal (1, 5, 11, 19, 29, ...).Seja g que representa a sequência acima, ou seja, $g(1) = 1$; $g(2) = 5$; $g(3) = 11$; $g(4) = 19$, ...?

a) Seria possível que g seja uma função afim? Justifique sua resposta.

Se fosse possível que g fosse uma função afim, então $g(x) = ax+b$. Dessa forma, teríamos

$$1 = g(1) = a.1 + b,\ \ 5 = g(2) = a.2 + b,\ \ 11 = g(3) = a.3 + b,\ \ 19 = g(4) = a.4 + b,$$

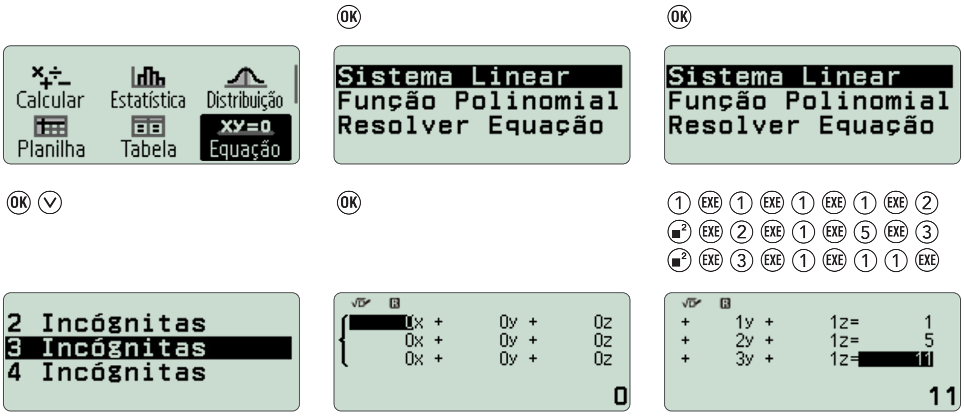
Dessa forma, vemos que não podemos encontrar valores para a e b que satisfaça todas as equações acima. Logo não é possível que g seja uma função afim.

b) Seria possível que g seja uma função quadrática? Justique sua resposta.

Se fosse possível que f fosse uma função afim, então $g(x) = ax^2+bx+c$. Dessa forma, teríamos

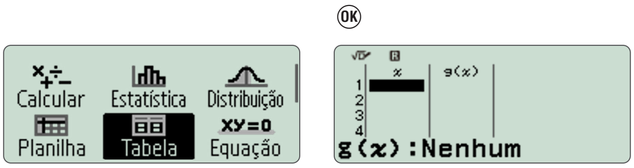
$$1 = g(1) = a.1 + b.1 + c,\ \ 5 = g(2) = a.2^2 + b.2 + c,\ \ 11 = g(3) = a.3^2 + b.3 + c,\ \ 19 = g(4) = a.4^2 + b.4 + c,$$

Dessa forma, utilizando o aplicativo Equação/Sistema Linear para resolver as equações acima, encontramos que a=1, b=-1 e c=1.

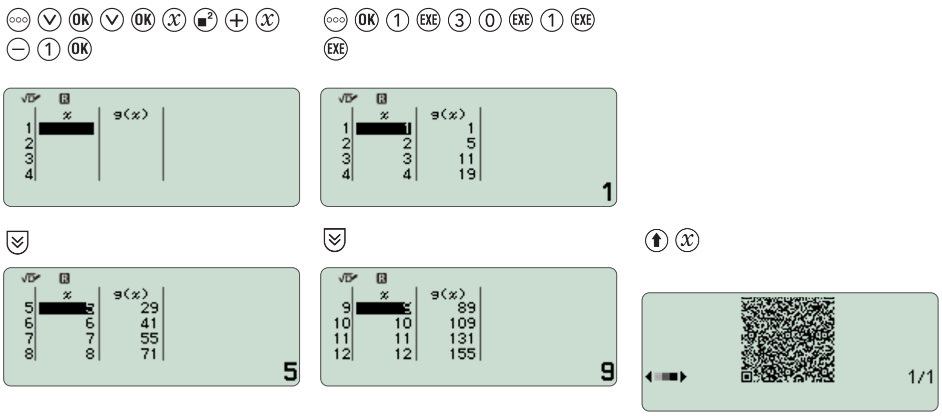


Vemos que a função $g(x)=x^2+x-1$ satisfaz as demais equações, logo g é a função procurada.

Vamos criar uma tabela de valores para a função $f(x)= x^2-x+1$ com $x=1, 2, ... , 30$. No aplicativo Tabela, temos:



Vamos definir $f(x)= x^3$ e criar uma tabela de valores $x=1, 2, 3, ... , 10$.



04 Qual é o número que ocupa a posição central da 7ª linha da pirâmide de números ímpares? Que estratégia você usou para perceber o padrão? De que outra forma poderia confirmar sua resposta?

Os termos centrais seguem o padrão, 1, 9, 25, 49, ..., ou seja, $f(x)= x^2$

Em relação ao número central, pode-se observar que na fila 3, temos número central é 9, ou seja, 3^2, na próxima fila (5) temos o número central 25, que corresponde 5^2, dessa forma, podemos generalizar $f(x) = (2x-1)^2$.

Progressão Aritmética de ordem n

Chamamos de Progressão Aritmética de ordem n uma sequência numérica em que as diferenças sucessivas, calculadas até a n-ésima ordem, são constantes.

Em outras palavras:

Uma PA de 1ª ordem é a PA comum que já conhecemos: a diferença entre termos consecutivos é constante.

Uma PA de 2ª ordem é uma sequência em que a primeira diferença não é constante, mas a segunda diferença é constante.

Mais geralmente, uma sequência é chamada de PA de ordem n quando a primeira diferença não é constante, nem a segunda, nem a terceira... mas a n-ésima diferença (obtida repetindo o processo de subtração) se torna constante.

01 Verifique que a Progressão Aritmética 2, 5, 8, 11, 14 é de 1ª ordem

02 Verifique que Progressão Aritmética 1, 3, 7, 13, 21... é de 2ª ordem

02 Verifique que Progressão Aritmética de 2ª ordem 1, 8, 27, 64, 125... é de 3ª ordem

f(x) P.A. de ordem n e grau do polinômio

A noção de PA de ordem n está diretamente ligada ao grau do polinômio que gera a sequência.

PA de 1ª ordem - Função de 1º grau
$y=ax+b$

PA de 2ª ordem - Função de 2º grau
$y=ax^2+bx+c$

PA de 3ª ordem - Função de 3º grau
$y=ax^3+bx^2+cx+d$

Na prática, essa análise ajuda os alunos a compreender quando a generalização é quadrática (caso da EM13MAT502) e quando ela ultrapassa esse nível.

07 Função Afim
Conhece o Índice de Massa Corporal?

Detalhes da Imagem: Pessoa sobre uma balança branca desfocado, foco na fita métrica.

O IMC (Índice de Massa Corporal) é um indicador para medir a obesidade de uma pessoa. Este indicador é obtido com a seguinte fórmula:

$$IMC = \frac{Peso\ (kg)}{Altura^2\ (m^2)}$$

Intervalo de massa corporal				
Inferior a 15	Entre 15 e 18,5	Entre 18,5 e 25	Entre 25 e 30	Acima de 30
Abaixo do peso	Magro	Normal	Sobrepeso	Obeso

Acrescentando-se fatores como idade e sexo aos dados de peso e altura, obtém-se outro índice mais preciso chamado CUN-BAE (composição de gordura corporal). Dependendo do índice CUN – BAE estaremos em um dos seguintes intervalos:

Intervalo percentual de gordura no corpo	Homens	Mulheres
Peso normal	Até 20%	Até 30%
Sobrepeso	20,1% - 25%	30,1% - 35%
Obesidade	Maior que 25,1%	Maior que 35,1%

Atualmente o CUN – BAE está substituindo o IMC por ser mais representativo.

01 Comepete a tabela abaixo a seguir:

	Peso (kg)	Altura (m)	IMC (A)
Aluno 1	50,0	1,65	
Aluno 2	48,7		15,9
Aluno 3		1,65	19,5

02 Na classe há um menino e uma menina da mesma idade e do mesmo peso. Todavia, o percentual de gordura corporal do rapaz é de 14,3% e o da menina, 30,6%. O menino tem 1,66m de altura e a menina 1,58m e seu peso é de 60,1kg. Descubra o IMC de cada um deles e comente os resultados obtidos.

03 Na tabela seguinte, aparecem as alturas em metros e os pesos em quilos de 10 pessoas.

Altura (x)	1,75	1,80	1,62	1,57	1,80	1,73	1,71	1,68	1,65	1,65
Peso (y)	75	82	57	67	78	65	65	67	62	58

a) Supondo que a relação de x e y pode ser modelado pela regressão linear de y em x com a equação $y=ax+b$, onde a e b são números reais. Obtenha a função $y = ax+b$.

b) Calcule o IMC para uma altura 1,57m com o dado do peso correspondente que aparece na tabela e com o valor estimado segundo o modelo obtido. Determine o IMC para as alturas de 1,50m e 1,70m.

07 Função Afim

Conhece o Índice de Massa Corporal?

Detalhes da Imagem: Pessoa sobre uma balança branca desfocado, foco na fita métrica.

O IMC (Índice de Massa Corporal) é um indicador para medir a obesidade de uma pessoa. Este indicador é obtido com a seguinte fórmula:

$$IMC = \frac{Peso\ (kg)}{Altura^2\ (m^2)}$$

Intervalo de massa corporal				
Inferior a 15	Entre 15 e 18,5	Entre 18,5 e 25	Entre 25 e 30	Acima de 30
Abaixo do peso	Magro	Normal	Sobrepeso	Obeso

Acrescentando-se fatores como idade e sexo aos dados de peso e altura, obtém-se outro índice mais preciso chamado CUN-BAE (composição de gordura corporal). Dependendo do índice CUN – BAE estaremos em um dos seguintes intervalos:

Intervalo percentual de gordura no corpo	Homens	Mulheres
Peso normal	Até 20%	Até 30%
Sobrepeso	20,1% - 25%	30,1% - 35%
Obesidade	Maior que 25,1%	Maior que 35,1%

Atualmente o CUN – BAE está substituindo o IMC por ser mais representativo.

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Orientações Didáticas e Técnicas

Com as duas primeiras atividades, pretende-se que os alunos, a partir de uma expressão algébrica, determinem o valor de uma variável conhecendo as outras.
Com as últimas atividades, busca-se que encontrem, a partir de alguns dados e com a ajuda da calculadora, um modelo que se ajuste a eles para prever outros dados desconhecidos a partir da gráfica obtida.
Além disso, com a última atividade pretende-se utilizar o modelo tanto para analisar a diferença entre o valor observado e o valor fornecido pelo modelo, como para estimar o valor do IMC para uma altura cujo peso é desconhecido.
Para encontrar a função linear será utilizada a aplicação Estatística e, para a representação gráfica, gera-se um código QR.

01 Comepete a tabela abaixo a seguir:

Para os cálculos abaixo, faremos uso do aplicativo Calcular trabalhando as relações do IMC.

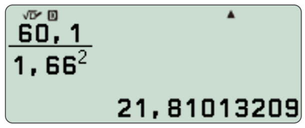
	Peso (kg)	Altura (m)	IMC (A)
Aluno 1	50,0	1,65	18,4
Aluno 2	48,7	1,75	15,9
Aluno 3	53	1,65	19,5

Conexões BNCC

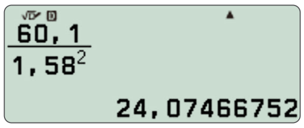
Discussão pedagógica
Essa atividade mostra que mesmo com pesos próximos, a altura impacta fortemente o IMC.
É uma boa oportunidade para provocar os alunos a perceber que não basta olhar o peso isolado.
Pode-se propor que eles comparem dois colegas fictícios com o mesmo peso mas alturas diferentes (como já aparece na sequência da atividade).

02 Na classe há um menino e uma menina da mesma idade e do mesmo peso. Todavia, o percentual de gordura corporal do rapaz é de 14,3% e o da menina, 30,6%. O menino tem 1,66m de altura e a menina 1,58m e seu peso é de 60,1kg. Descubra o IMC de cada um deles e comente os resultados obtidos.

O IMC do menino é de aproximadamente 21,8 com três algarismos significativos.



O IMC do menino é de aproximadamente 21,8 com três algarismos significativos.



Mesmo com o mesmo peso, a diferença de altura faz variar o IMC: menor altura, implica maior IMC.

Os percentuais de gordura são bem distintos (14,3% vs. 30,6%), mostrando que IMC não mede composição corporal; duas pessoas com o mesmo IMC/peso podem ter distribuições de gordura e massa magra muito diferentes.

Pela tabela de IMC
Menino (IMC ≈ 21,8): está na faixa normal (entre 18,5 e 25).
Menina (IMC ≈ 24,1): também está na faixa normal, mas próxima ao limite superior (25), que marca o início do sobrepeso.

Pela tabela de percentual de gordura corporal (CUN-BAE)
Menino (14,3%): classifica-se como peso normal (até 20%).
Menina (30,6%): já ultrapassa o limite de 30% para mulheres. Assim, enquadra-se em sobrepeso (30,1% a 35%).

Conexões BNCC

É uma oportunidade para discutir com os alunos a importância de não depender de uma única medida ao avaliar saúde e nutrição.

03 Na tabela seguinte, aparecem as alturas em metros e os pesos em quilos de 10 pessoas.

Altura (x)	1,75	1,80	1,62	1,57	1,80	1,73	1,71	1,68	1,65	1,65
Peso (y)	75	82	57	67	78	65	65	67	62	58

a) Supondo que a relação de x e y pode ser modelado pela regressão linear de y em x com a equação $y=ax+b$, onde a e b são números reais. Obtenha a função $y = ax+b$.

b) Calcule o IMC para uma altura 1,57m com o dado do peso correspondente que aparece na tabela e com o valor estimado segundo o modelo obtido. Determine o IMC para as alturas de 1,50m e 1,70m.

Para buscar a regressão linear (função afim), vamos no aplicativo Estatística / 2-variáveis.

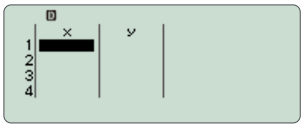
f(x) Encontrar função afim (Regressão)

O que é a função da regressão linear?
A regressão linear serve para encontrar uma reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos de uma nuvem de dados. Ela é uma maneira de resumir a relação entre duas variáveis (por exemplo, altura e peso; horas de estudo e nota; idade e batimentos cardíacos).

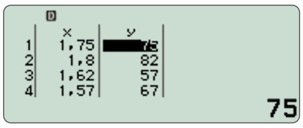
O que precisamos para usá-la?
Basta ter pares de dados que relacionem uma variável com outra. A calculadora ou o computador analisam esses pares e procuram a linha mais próxima possível de todos os pontos.

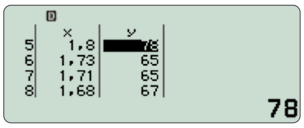
O que a regressão linear faz?
Cria um modelo preditivo: com base nos dados que já temos, podemos estimar valores que não conhecemos.
Mostra a tendência da relação: se os valores crescem juntos, se um aumenta enquanto o outro diminui, ou se praticamente não há relação.
Permite comparar o valor previsto pela reta com o valor real, observando se há diferença grande ou pequena.

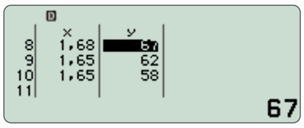
OK ∨ OK



Após inserir os dados, temos

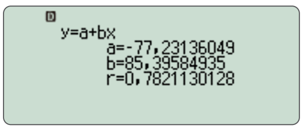






Pressionamos EXE e escolhemos Equação de Regressão (Modelo Afim)

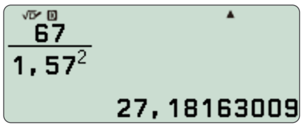
EXE ∨ OK OK



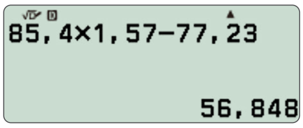
A expressão da função afim que melhor se ajusta aos dados é

$$y = 85{,}40x - 77{,}23 \quad \text{(4 algarismos significativos)}$$

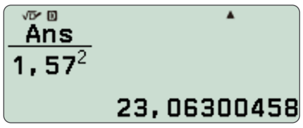
O IMC para 1,57m de altura, utilizando o peso que aparece na tabela, obtemos da seguinte forma:



Para realizar a estimativa do IMC para todos os valores pedidos



Daí



O IMC estimado para uma altura de 1,57 m é, aproximadamente, 23,06.

O IMC estimado para uma altura de 1,50m é, aproximadamente 22,61 e finalmente para uma altura de 1,70m o IMC estimado é, aproximadamente, 23,51.

Conexões BNCC

Integração entre IMC e regressão linear
O plano já mostra bem a diferença entre IMC e percentual de gordura, mas pode ser interessante enfatizar que a regressão linear aqui não substitui o cálculo do IMC: ela serve para estimar pesos esperados a partir da altura e, em seguida, calcular o IMC para valores que não estavam na tabela. Isso ajuda os alunos a perceberem a função da modelagem matemática.

Conexão com o cotidiano
O tema de peso, altura e IMC aproxima o conteúdo da vida dos alunos, mas é importante sempre lembrar de tratar com cuidado e sensibilidade. Pode-se reforçar que o objetivo é aprender Matemática, e não julgar corpos.

Proposta metacognitiva
Estimular os estudantes a refletirem:
O que muda quando usamos só o IMC?
Que diferença faz considerar também o percentual de gordura?
Até que ponto o modelo linear é uma boa aproximação?
Isso os ajuda a perceber as limitações e o alcance dos modelos matemáticos.

Conhece o Índice de Massa Corporal?

Detalhes da Imagem: Pessoa sobre uma balança branca desfocado, foco na fita métrica.

O IMC (Índice de Massa Corporal) é um indicador para medir a obesidade de uma pessoa. Este indicador é obtido com a seguinte fórmula:

$$IMC = \frac{Peso\ (kg)}{Altura^2\ (m^2)}$$

Intervalo de massa corporal				
Inferior a 15	Entre 15 e 18,5	Entre 18,5 e 25	Entre 25 e 30	Acima de 30
Abaixo do peso	Magro	Normal	Sobrepeso	Obeso

Acrescentando-se fatores como idade e sexo aos dados de peso e altura, obtém-se outro índice mais preciso chamado CUN-BAE (composição de gordura corporal). Dependendo do índice CUN – BAE estaremos em um dos seguintes intervalos:

Intervalo percentual de gordura no corpo	Homens	Mulheres
Peso normal	Até 20%	Até 30%
Sobrepeso	20,1% - 25%	30,1% - 35%
Obesidade	Maior que 25,1%	Maior que 35,1%

Atualmente o CUN – BAE está substituindo o IMC por ser mais representativo.

Metodologia ativa: Aprendizagem por Estações
Estação 1 – Cálculo individual com a calculadora
Alunos completam a tabela de IMC usando a fórmula e a calculadora.
Foco: uso correto da expressão.

Estação 2 – Análise e comparação dos resultados
Em grupo, os alunos discutem:
Quem ficou com maior IMC?
Qual fator foi determinante (peso ou altura)?
Produzem pequenas anotações em cartolina ou quadro.

Estação 3 – Exploração tecnológica
Usam a função Tabela para registrar os pares (altura, IMC).
Visualizam padrões e discutem a relação matemática entre as variáveis.

Estação 4 – Reflexão metacognitiva
Grupo debate: "O que o IMC mede e o que ele não mede?".
Confrontam com a tabela de percentuais de gordura.
Produzem uma frase-síntese sobre limites do IMC.

Benefícios pedagógicos
Favorece a autonomia do aluno, que circula entre tarefas diferentes.
Estimula o trabalho colaborativo e a resolução de problemas reais.
Amplia a visão de que a Matemática não é apenas cálculo, mas também interpretação crítica de modelos.

08 Educação Financeira e Sequências numéricas
A poupança é o melhor investimento?

Detalhes da Imagem: Uma muda crescendo em uma pilha de moedas tem como pano de fundo natural, verde desfocado, ideias para economizar dinheiro e crescimento econômico.

A caderneta de poupança, popularmente chamada de poupança, é um tipo de de conta bancária que você pode abrir para guardar seu dinheiro e ganhar um percentual sobre o valor aplicado. Dessa maneira, essa conta funciona como um investimento, ou seja, um gasto ou aplicação de recursos que produza um retorno futuro. Este investimento é de renda fixa, ou seja, prevê o pagamento do rendimento ao invetidor com base em regras definidas antes da contratação. A caderneta de poupança é um investimento popular já que em 2019, segundo o Banco Central, há 158 milhões de contas-poupança no Brasil. A conta poupança agrada, pois, ao contrários de alguns investimentos, permite sacar o dinheiro a qualquer momento e fazer transferências (necessário ser do mesmo titular). Todas essas possibilidades tornam a poupança mais uma conta do que um investimento. Afinal, o dinheiro ali aplicado só rende na mesma data do mês posterior do depósito. Por exemplo, se fizer uma aplicação dia 10 de abril e outra dia 20 de abril, a primeira terá rendimento no dia 10 de maio, enquanto a segunda no dia 20 de maio e creditado apenas no próximo dia útil.E quano rende a poupança? A poupança funciona com duas taxas: uma calculada pelo governo, TR (Taxa Referencial) e outra pelos bancos. Esta última possui um cálculo, se a SELIC (taxa básica de juros da economia do Brasil) for maior do que 8,5%, a taxa adicional é de 0,5% ao mês, e se for igual ou menor a 8,5%, a taxa adicional equivale a 70% da SELIC. Será que a caderneta de poupança é o melhor investimento?

Texto produzido por Jalman Lima

01 Numa conta-poupança foi depositado R$50,00 no dia primeiro, cuja taxa de juros é de 0,7%a.m (ao mês),

a) Qual é a expressão matemática que representa o valor o rendimento no próximo dia de aniversário?

b) Qual é o valor do rendimento no próximo dia de aniversário?

c) Qual será o montante total na conta no próximo dia do aniversário, supondo que todos os dias de aniversários são dias úteis?

02 Na conta-poupança de um banco foi depositado R$50,00 no dia primeiro, cuja taxa de juros é de 0,7% a.m (ao mês). Preencha a tabela abaixo

Mês referência	Expressão matemática	Valor do montante	Valor dos juros
Mês 0			
Mês 1			
Mês 2			
Mês 3			
...			
Mês 12			

03 Na conta-poupança de um banco foi depositado R$50,00 em cada um dos meses subsequentes no dia do aniversário e cuja taxa de juros é de 0,7% a.m. Preencha a tabela abaixo para os próximos 12 meses.

Mês	Déposito	Juros mês	Juros TTL	Expressão	Acúmulo
0	50,00	0,00	0,00	50	50,00
1	100,00	0,35	0,35	50(1+0,7%)	100,35
2					
3					

03 Na conta-poupança de um banco foi depositado R$50,00 em cada um dos meses subsequentes no dia do aniversário e cuja taxa de juros é de 0,7% a.m. Preencha a tabela abaixo para os próximos 12 meses.

04 O Certificado de Deopósito Bancário (CDB) é um outro invstimento conhecido na renda fixa brasileira. O rendimento do CDB depende do banco. Cada banco tem uma regra a depender do tipo (prefixado, pós-fixado e híbrido) e da porcentagem do CDI (Certificado de Depósito Interbancário).

No Banco X, onde o investimento mínimo é de R$1 000,00 e com retorno de 100% do CDI, rendeu 13,65% ao ano, considerando a taxa SELIC a 13,75% a.a. Lembrando que para um investimento CDB deve ser deduzido 17,5% do valor inicial para uma aplicação que fica 365 dias. Quem rendeu mais em 2022: investir R$ 1.000 na poupança ou investir R$1.000 na caderneta de poupança?

08 Educação Financeira e Sequências numéricas
A poupança é o melhor investimento?

Detalhes da Imagem: Uma muda crescendo em uma pilha de moedas tem como pano de fundo natural, verde desfocado, ideias para economizar dinheiro e crescimento econômico.

A caderneta de poupança, popularmente chamada de poupança, é um tipo de de conta bancária que você pode abrir para guardar seu dinheiro e ganhar um percentual sobre o valor aplicado. Dessa maneira, essa conta funciona como um investimento, ou seja, um gasto ou aplicação de recursos que produza um retorno futuro. Este investimento é de renda fixa, ou seja, prevê o pagamento do rendimento ao invetidor com base em regras definidas antes da contratação. A caderneta de poupança é um investimento popular já que em 2019, segundo o Banco Central, há 158 milhões de contas-poupança no Brasil. A conta poupança agrada, pois, ao contrários de alguns investimentos, permite sacar o dinheiro a qualquer momento e fazer transferências (necessário ser do mesmo titular). Todas essas possibilidades tornam a poupança mais uma conta do que um investimento. Afinal, o dinheiro ali aplicado só rende na mesma data do mês posterior do depósito. Por exemplo, se fizer uma aplicação dia 10 de abril e outra dia 20 de abril, a primeira terá rendimento no dia 10 de maio, enquanto a segunda no dia 20 de maio e creditado apenas no próximo dia útil.E quano rende a poupança? A poupança funciona com duas taxas: uma calculada pelo governo, TR (Taxa Referencial) e outra pelos bancos. Esta última possui um cálculo, se a SELIC (taxa básica de juros da economia do Brasil) for maior do que 8,5%, a taxa adicional é de 0,5% ao mês, e se for igual ou menor a 8,5%, a taxa adicional equivale a 70% da SELIC. Será que a caderneta de poupança é o melhor investimento?

Texto produzido por Jalman Lima

Calculadora científica fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT304 Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

Orientações Didáticas e Técnicas

Estas atividades podem servir para introduzir os conceitos juros compostos;

Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente; Compreender o significado da soma como padrões numéricas em casos práticos.

O uso da calculadora científica será interessante para abordar problemas mais interessantes como investir uma certa quantia por mês na caderneta de poupança e compará-la com outro investimento.

01 Numa conta-poupança foi depositado R$50,00 no dia primeiro, cuja taxa de juros é de 0,7%a.m (ao mês),

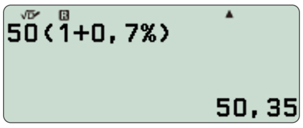
a) Qual é a expressão matemática que representa o valor o rendimento no próximo dia de aniversário?

Contexto

Antes de começar a trabalhar o tema, faça perguntas como "O que você entende por investimento?", "Quais as formas de investimento que você conhece ou ouviu falar?", " Você pretendeu ou pretende investigar? O que você gostaria de comprar nos próximos anos?".

O montante é dado pela expressão matemática 50(1+0,7%)

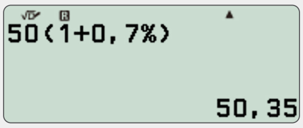
5 0 (1 + 0 , 7
[menu] ∨ OK OK) ⬆ EXE



Saída Decimal

Na calculadora o símbolo de produto é opcional entre um número e a abertura dos parênteses.

Além disso explorar o formato do número em sua forma padrão (expressões fracionárias e matemáticas) e em sua forma decimal, assim como outros formatos, através da tecla [FORMAT].



Numa conta-poupança foi depositado R$50,00 no dia primeiro, cuja taxa de juros é de 0,7%a.m (ao mês),

a) Qual é a expressão matemática que representa o valor o rendimento no próximo dia de aniversário?

A expressão que representa o valor o rendimento no próximo dia de aniversário é dado por 50x(1+0,7%).

b) Qual é o valor do rendimento no próximo dia de aniversário?

Os juros (ou rendimentos) foi de R$0,35.

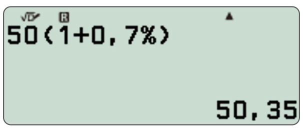
c) Qual será o montante total na conta no próximo dia do aniversário, supondo que todos os dias de aniversários são dias úteis?

O montante total no próximo dia de aniversário será de R$50,35.

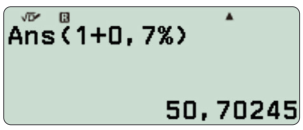
02 Na conta-poupança de um banco foi depositado R$50,00 no dia primeiro, cuja taxa de juros é de 0,7% a.m (ao mês). Preencha a tabela abaixo

Mês referência	Expressão matemática	Valor do montante	Valor dos juros
Mês 0	$50(1+0,7\%)^0$	50	0
Mês 1	$50(1+0,7\%)^1$	50,35	0,35
Mês 2	$50(1+0,7\%)^2$	50,70245	0,70
Mês 3	$50(1+0,7\%)^3$	51,0736715	1,07
...			
Mês 12	$50(1+0,7\%)^{12}$	54,3655331	4,37

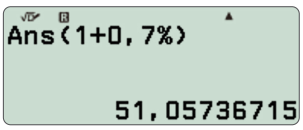
5 0 (1 + 0 , 7
[menu] ∨ OK OK) ⬆ EXE



Ans (1 + 0 , 7
[menu] ∨ OK OK) ⬆ EXE



EXE



EXE

Ans(1+0,7%)
51,41476872

EXE

Ans(1+0,7%)
51,7746721

EXE

Ans(1+0,7%)
52,13709481

EXE

Ans(1+0,7%)
52,50205447

EXE

Ans(1+0,7%)
52,86956885

EXE

Ans(1+0,7%)
53,23965583

EXE

Ans(1+0,7%)
53,61233342

EXE

Ans(1+0,7%)
53,98761976

EXE

Ans(1+0,7%)
54,3655331

Uma outra estratégia será a de expressões matemáticas

5 0 (1 + 0 , 7 CATALOG ∨ OK OK) ⬆ EXE

50(1+0,7%)
50,35

5 0 (1 + 0 , 7 CATALOG ∨ OK OK) $■^2$ ⬆ EXE

$50(1+0,7\%)^2$
50,70245

< ⌫ 3 EXE

$50(1+0,7\%)^3$
51,05736715

< ⌫ 4 EXE

$50(1+0,7\%)^4$
51,41476872

< ⌫ 5 EXE

$50(1+0,7\%)^5$
51,7746721

< ⌫ 6 EXE

$50(1+0,7\%)^6$
52,13709481

< ⌫ 7 EXE

$50(1+0,7\%)^7$
52,50205447

< ⌫ 8 EXE

$50(1+0,7\%)^8$
52,86956885

< ⌫ 9 EXE

$50(1+0,7\%)^9$
53,23965583

< ⌫ 1 0 EXE

$50(1+0,7\%)^{10}$
53,61233342

< ⌫ 1 EXE

$50(1+0,7\%)^{11}$
53,98761976

< ⌫ 2 EXE

$50(1+0,7\%)^{12}$
54,3655331

03 Na conta-poupança de um banco foi depositado R$50,00 em cada um dos meses subsequentes no dia do aniversário e cuja taxa de juros é de 0,7% a.m. Preencha a tabela abaixo para os próximos 12 meses.

Mês	Déposito	Juros mês	Juros TTL	Expressão	Acúmulo
0	50,00	0,00	0,00	50	50,00
1	100,00	0,35	0,35	50(1+0,7%)	100,35
2					
3					

Percebemos o que saldo final no dia da caderneta de poupança em 01/02/2023 seria o valor anterior multiplicado por (1+0,7%) e adicionado o valor 50, ou seja,

50(1+0,7%)+50.

Já o saldo final no dia 01/03/2023 para a mesma caderneta de poupança, supondo que seja um dia útil, seria o saldo anterior multiplicado por (1+0,7%) e adicionado o valor 50, ou seja,

(50(1+0,7%)+50).(1+0,7%)+50

Memória ANS

Na calculadora, o último valor calculado fica na memória (Ans), Ans é a ultima resposta (Answer em inglês) calculada pela calculadora.

Dessa forma podemos construir uma sequência numérica. Perceba que o cálculo do saldo da caderneta de poupança ao lado é o mesmo do realizado acima, só que ao invés de digitarmos o último valor calculado 100,35, utilizamos a tecla (Ans).

É possível utilizar as teclas direcionais (∧) (∨) para visualizar novamente os cálculos dos saldos feitos anteriormente.

5 0 (1 + 0 , 7 (CATALOG) (∨) (OK) (OK)) + 5 0 (⇧) (EXE)

50(1+0,7%)+50
100,35

(Ans) (1 + 0 , 7 (CATALOG) (∨) (OK) (OK)) + 5 0 (⇧) (EXE)

Ans(1+0,7%)+50
151,05245

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
202,1098172

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
253,5245859

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
305,299258

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
357,4363528

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
409,9384072

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
462,8079761

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
516,0476319

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
569,6599654

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
623,6475851

(EXE)

Ans(1+0,7%)+50
678,0131182

Outra forma,

Somatório	(CATALOG) (OK) (∨) (∨) (OK)
Expressão	5 0 (1 + 0 , 7 (CATALOG) (∨) (OK) (OK)) (■□) (x)
Limite inferior	(∨) 0
Limite superior	(∧) 1 2
Cálculo	(EXE)

$\sum_{x=0}^{12}(50(1+0,7\%)^{x})$
678,0131182

CASIO
EDUCAÇÃO

Mês	Déposito	Juros mês	Juros TTL	Acúmulo
0	50,00	0,00	0,00	50,00
1	100,00	0,35	0,35	100,35
2	150,00	0,70	1,05	151,05
3	200,00	1,06	2,11	202,11
4	250,00	1,41	3,52	253,52
5	300,00	1,77	5,29	305,29
6	350,00	2,14	7,43	357,43
7	400,00	2,50	9,93	409,93
8	450,00	2,87	12,80	462,80
9	500,00	3,24	16,04	516,04
10	550,00	3,61	19,65	569,65
11	600,00	3,99	23,64	623,64
12	650,00	4,37	28,01	678,01

04 O Certificado de Deopósito Bancário (CDB) é um outro invstimento conhecido na renda fixa brasileira. O rendimento do CDB depende do banco. Cada banco tem uma regra a depender do tipo (prefixado, pós-fixado e híbrido) e da porcentagem do CDI (Certificado de Depósito Interbancário).

No Banco X, onde o investimento mínimo é de R$1 000,00 e com retorno de 100% do CDI, rendeu 13,65% ao ano, considerando a taxa SELIC a 13,75% a.a. Lembrando que para um investimento CDB deve ser deduzido 17,5% do valor inicial para uma aplicação que fica 365 dias. Quem rendeu mais em 2022: investir R$ 1.000 na poupança ou investir R$1.000 na caderneta de poupança?

Caderneta de Poupança
Investimento inicial: R$1000
Taxa de juros: 7,9% ao ano

CDB
Investimento inicial: R$1000
Taxa de rendimento: 13,65% ao ano
Tributação sobre os rendimentos: 17,50%

Vemos que ao compararmos o rendimento da caderneta de poupança em 2022 e no CDB, no mesmo período, o CDB tem um retorno melhor que a caderneta de poupança.

Ampliação: Funções Exponenciais

A poupança é o melhor investimento?

Detalhes da Imagem: Uma muda crescendo em uma pilha de moedas tem como pano de fundo natural, verde desfocado, ideias para economizar dinheiro e crescimento econômico.

A caderneta de poupança, popularmente chamada de poupança, é um tipo de de conta bancária que você pode abrir para guardar seu dinheiro e ganhar um percentual sobre o valor aplicado. Dessa maneira, essa conta funciona como um investimento, ou seja, um gasto ou aplicação de recursos que produza um retorno futuro. Este investimento é de renda fixa, ou seja, prevê o pagamento do rendimento ao invetidor com base em regras definidas antes da contratação. A caderneta de poupança é um investimento popular já que em 2019, segundo o Banco Central, há 158 milhões de contas-poupança no Brasil. A conta poupança agrada, pois, ao contrários de alguns investimentos, permite sacar o dinheiro a qualquer momento e fazer transferências (necessário ser do mesmo titular). Todas essas possibilidades tornam a poupança mais uma conta do que um investimento. Afinal, o dinheiro ali aplicado só rende na mesma data do mês posterior do depósito. Por exemplo, se fizer uma aplicação dia 10 de abril e outra dia 20 de abril, a primeira terá rendimento no dia 10 de maio, enquanto a segunda no dia 20 de maio e creditado apenas no próximo dia útil.E quano rende a poupança? A poupança funciona com duas taxas: uma calculada pelo governo, TR (Taxa Referencial) e outra pelos bancos. Esta última possui um cálculo, se a SELIC (taxa básica de juros da economia do Brasil) for maior do que 8,5%, a taxa adicional é de 0,5% ao mês, e se for igual ou menor a 8,5%, a taxa adicional equivale a 70% da SELIC. Será que a caderneta de poupança é o melhor investimento?

Texto produzido por Jalman Lima

01 Na conta-poupança de um banco foi depositado R$50,00 no dia primeiro, cuja taxa de juros é de 0,7% a.m (ao mês). Determine a função f (montante) em função do tempo x e determine o montante e os juros dos próximos 24 meses com o auxílio de uma tabela de valores.

02 Na conta-poupança de um banco foi depositado R$50,00 em cada um dos meses subsequentes no dia do aniversário e cuja taxa de juros é de 0,7% a.m. Determine a função f (montante) em função do tempo x e determine o montante e os juros dos próximos 24 meses com o auxílio de uma tabela de valores.

09 Progressões
A Torre de Hanoi

Descrição da Imagem: Torre de Hanói em perspectiva.

De acordo com um antigo mito indiano, o centro do mundo estaria localizado sob a cúpula de um templo na cidade de Benares, na Índia. Nesse templo, haveria uma base de latão com três pinos de diamante fixados. Conta-se que, ao criar o mundo, o deus Brahma teria colocado em um dos pinos uma pilha de sessenta e quatro discos de ouro, organizados em ordem decrescente de tamanho: o maior apoiado sobre a base e o menor no topo. Essa pilha recebeu o nome de Torre de Brahma.
Segundo a tradição, os sacerdotes do templo receberam a missão de transferir todos os discos de um pino para outro, obedecendo a duas regras imutáveis:

1. mover apenas um disco por vez;
2. nunca colocar um disco maior sobre outro menor.

Quantos movimentos seriam necessário para transferir todos os discos da Torre de Brahma?

01 Crie uma Torre de Brahma (Torre de Hanoi), segundo às instruções acima com um, dois e três discos.
a) Quantos movimentos são realizados para a locomoção de um disco e com dois discos do primeiro pino até o último, seguindo às regras cima?

b) Quantos movimentos seriam necessários para três pinos? Seria possível realizar a locomoção dos discos para o último pino, como menos movimentos?

c) Você conseguiria prever o resultado para quatro discos? Para comprovar, faça o experimento com quatro discos.

02 Existe algum padrão numérico para determinar o número de movimentos? Se existir, qual o padrão numérico?

03 Seria possível prever a quantidade mínima de movimentos para locomover cinco discos do primeiro pino para o último?

04 Qual a quantidade aproximada de movimentos para 64 discos?

05 Pensar em alguma estratégia para calcular exatamente (com todos os dígitos) a quantidade de movimentos necessários para mover 64 os discos da Torre de Brahma do primeiro pino ao último.

A Torre de Hanoi

Descrição da Imagem: Torre de Hanói em perspectiva.

De acordo com um antigo mito indiano, o centro do mundo estaria localizado sob a cúpula de um templo na cidade de Benares, na Índia. Nesse templo, haveria uma base de latão com três pinos de diamante fixados. Conta-se que, ao criar o mundo, o deus Brahma teria colocado em um dos pinos uma pilha de sessenta e quatro discos de ouro, organizados em ordem decrescente de tamanho: o maior apoiado sobre a base e o menor no topo. Essa pilha recebeu o nome de Torre de Brahma.
Segundo a tradição, os sacerdotes do templo receberam a missão de transferir todos os discos de um pino para outro, obedecendo a duas regras imutáveis:

1. mover apenas um disco por vez;
2. nunca colocar um disco maior sobre outro menor.

Quantos movimentos seriam necessário para transferir todos os discos da Torre de Brahma?

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Orientações Didáticas e Técnicas

Inicie a atividade contextualizando o mito da Torre de Brahma para despertar curiosidade e motivação.

Proponha que os alunos experimentem com materiais concretos (copos, tampas, discos) antes de formalizar o padrão numérico.

Estimule a observação dos resultados com 1, 2, 3 e 4 discos, conduzindo-os à generalização da fórmula

Relacione a atividade à habilidade EM13MAT508, evidenciando a progressão geométrica associada a funções exponenciais.

Incentive os alunos a explicarem suas estratégias, promovendo a metacognição e a comparação de métodos.

01 Crie uma Torre de Brahma (Torre de Hanoi), segundo às instruções acima com um, dois e três discos.

a) Quantos movimentos são realizados para a locomoção de um disco e com dois discos do primeiro pino até o último, seguindo às regras cima?

Regras básicas da Torre de Hanói:

Só é permitido mover um disco por vez.
Um disco nunca pode ser colocado sobre um disco menor.
O objetivo é mover todos os discos do primeiro pino para o último pino, usando o pino do meio como auxiliar.

a) Para dois discos, 3 movimentos
Sequência dos movimentos para 2 discos:
Move disco 1 (menor) do Pino A para Pino B
Move disco 2 (maior) do Pino A para Pino C
Move disco 1 do Pino B para Pino C

b) Quantos movimentos seriam necessários para três pinos? Seria possível realizar a locomoção dos discos para o último pino, como menos movimentos?

Regras básicas da Torre de Hanói:

Para 3 discos: 7 movimentos (mínimo).
Não, não é possível fazer com menos movimentos. A sequência ideal é otimizada — qualquer outra alternativa resulta em mais movimentos ou quebra das regras.

c) Você conseguiria prever o resultado para quatro discos? Para comprovar, faça o experimento com quatro discos.

1 Disco, 1 movimento
2 Discos, 3 movimentos
3 Discos, 7 movimentos
4 Discos, 15 movimentos

Discos (D1 = menor, D4 = maior):
Pinos: A (início), B (auxiliar), C (destino).

Passos:

Move D1 A para C / Move D2 A para B / Move D1 C para B / Move D3 A para C / Move D1 B para A
Move D2 B para C / Move D1 A para C / Move D4 A para B / Move D1 C para B / Move D2 C para A
Move D1 B para A / Move D3 C para B / Move D1 A para C / Move D2 A para B / Move D1 C para B

Total: 15 movimentos

Conexões BNCC

Comentário Pedagógico – Torre de Hanói: Desenvolvendo o Pensamento Recursivo

A Torre de Hanói é uma excelente ferramenta pedagógica para desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de planejamento e o pensamento recursivo. Embora seja apresentada como um quebra-cabeça, ela oferece oportunidades ricas para discutir conceitos matemáticos e computacionais.

Recursividade
A resolução do problema com n discos depende da solução com n - 1 discos. Isso introduz aos alunos a ideia de dividir um problema maior em partes menores e semelhantes, o que é a base do pensamento recursivo e essencial em algoritmos e programação.

2. Crescimento exponencial
A fórmula $2^n - 1$ revela como o número de movimentos cresce rapidamente com o aumento de discos. Isso permite discutir com os alunos o conceito de crescimento exponencial e suas implicações em problemas de escala.

02 Existe algum padrão numérico para determinar o número de movimentos? Se existir, qual o padrão numérico?

No exercício anterior, percebemos que a quantidade de movimentos não cresce de forma linear, mas sim exponencial. Os movimentos crescem de forma: 1, 3, 7, 15, ... Esse padrão caracteriza uma progressão de crescimento exponencial.

Além disso, a quantidade de movimentos (mínimos) para uma quantidade fixa de discos, surge outro padrão: o total corresponde a $2^n - 1$. Isso reforça a relação entre a PG e a função exponencial, mostrando como a soma parcial cresce rapidamente.

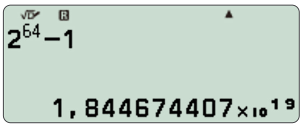
03 Seria possível prever a quantidade mínima de movimentos para locomover cinco discos do primeiro pino para o último?

Sim. Usando a expressão $2^5 - 1 = 31$ movimentos.

Portanto, para cinco discos, são necessários 31 movimentos mínimos para transferi-los corretamente do primeiro ao último pino.

04 Qual a quantidade aproximada de movimentos para 64 discos?

A quantidade aproximada de movimentos para todos os 64 discos



ou seja, aproximadamente $1{,}844674407 \times 10^{19}$.

Conexões BNCC

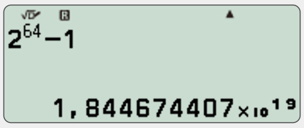
Provoque a turma: "O que cresce mais rápido: somar sempre +1 bilhão ou dobrar? Em quantos passos o 'dobrar' supera qualquer soma fixa?" — isso reforça a associação entre PG (razão 2) e função exponencial em domínio discreto

Somatório (Símbolo)

Esta pode ser uma ótima oportunidade para introduzir o símbolo de somatório Σ (sigma, em grego). Cuidado. Professores têm que ter cuidado com o uso e desenvolvimento do vocabulário (em português e em matemática). O excesso de níveis de simbolismo pode dificultar o aprendizado.

Antes de introduzir este símbolo, faça a seguinte pergunta:

A quantidade de grãos até a quinta casa é

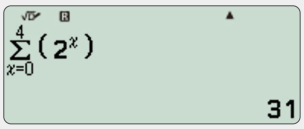


Os matemáticos possuem uma terminologia muito semelhante à expressão acima. Ao invés de usarmos o tradicional S, usamos o S grego, ou seja, Σ (sigma).

Em outras palavras,

$$\sum_{x=0}^{4} 2^x$$

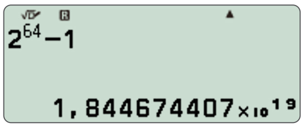
Logo usando o somatório temos,



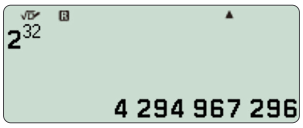
CASIO EDUCAÇÃO

05 Elabore estratégias para calcular exatamente (com todos os dígitos) a quantidade de movimentos para mover 64 discos.

A calculadora não fornece todos os dígitos do valor acima, logo vamos simplificar a expressão acima. Usando propriedade de potenciação, teremos $2^{64} - 1 = (2^{32})^2 - 1$



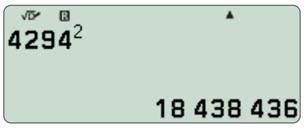
Usando a calculadora teremos

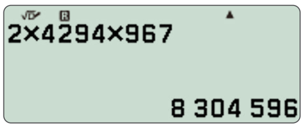


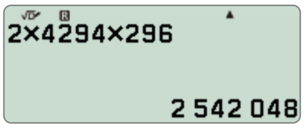
Logo,

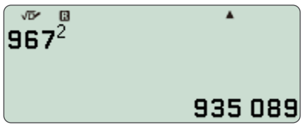
$$
\begin{aligned}
2^{64} = (2^{32})^2 &= (4\ 294\ 967\ 296)^2 \\
&= (4294000000+967000+296)^2 \\
&= (4294 \times 10^6 + 967 \times 10^3 + 296)^2 \\
&= (4294 \times 10^6 + 967 \times 103 + 296)\ (4294 \times 10^6 + 967 \times 10^3 + 296) \\
&= 4294^2 \times 10^{12} + 4294 \times 967 \times 10^9 + 4294 \times 296 \times 10^6 + 967 \times 4294 \times 10^9 + 967^2 \times 10^6 + \\
&\quad + 967 \times 296 \times 10^3 + 296 \times 4294 \times 10^6 + 296 \times 967 \times 10^3 + 296^2
\end{aligned}
$$

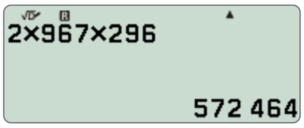
Usando a calculadora científica para fazer os cálculos auxiliares











Dessa forma, teremos

	18 438 436 000 000 000 000
	8 304 596 000 000 000
	2 542 048 000 000
	935 089 000 000
	572 464 000
+	87 616
	18 446 744 073 709 551 616

Conexões BNCC

Há outras estratégias para resolver este problema:

Quadrado de uma soma com três termos

Diferenças de dois quadrados

Usando dígitos ocultos da calculadora

Logo o número total é 18 446 744 073 709 551 615 movimentos.

09 Progressões
A Torre de Hanoi

Descrição da Imagem: Torre de Hanói em perspectiva.

De acordo com um antigo mito indiano, o centro do mundo estaria localizado sob a cúpula de um templo na cidade de Benares, na Índia. Nesse templo, haveria uma base de latão com três pinos de diamante fixados. Conta-se que, ao criar o mundo, o deus Brahma teria colocado em um dos pinos uma pilha de sessenta e quatro discos de ouro, organizados em ordem decrescente de tamanho: o maior apoiado sobre a base e o menor no topo. Essa pilha recebeu o nome de Torre de Brahma.
Segundo a tradição, os sacerdotes do templo receberam a missão de transferir todos os discos de um pino para outro, obedecendo a duas regras imutáveis:

1. mover apenas um disco por vez;
2. nunca colocar um disco maior sobre outro menor.

Quantos movimentos seriam necessário para transferir todos os discos da Torre de Brahma?

01 Se fizéssemos um movimento certo por segundo, quanto tempo levaríamos para realizar todos os movimentos para transportar 64 discos?

10 Progressões
A lenda de Sissa: o inventor do xadrez

Detalhes da Imagem: Tigela com farinha, grãos e espigas de trigo sobre mesa de madeira

Uma antiga lenda sobre o xadrez afirma que o inventor do jogo pediu como compensação ao rei por sua invenção uma quantidade muito grande de grãos de trigo. Quão grande? De fato, pelo pedido não convencional, a quantidade não parecia tão chamativa a priori. A conta era fácil: um grão de trigo na primeira casa, dois na seguinte, quatro na próxima e assim sucessivamente, duplicando a quantidade anterior, até completar a última casa.
Toda a corte esperava que Sissa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois grãos de trigo pela segunda casa; quatro grãos de trigo pela terceira casa; oito grãos de trigo pela quarta casa e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a casa de número sessenta e quatro (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas). Seu pedido provocou risos. O rei meio que contrariado disse-lhe: "Um invento tão brilhante e um pedido tão simples? Escolha uma grande riqueza meu jovem, um de meus castelos, um palácio ou até uma de minhas mulheres! " Todavia Sissa mostrava-se inapelável à proposta do rei, e, como palavra de rei é palavra de rei, este, ainda contrariado, pediu a seus criados que entregassem a Sissa um grande saco de grãos de trigo. Sissa, entretanto, recusou a oferta dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido, nem um grão a mais, nem um grão a menos. O rei pediu então para que seus calculistas fizessem as contas.

Quantos grãos de trigo exatamente Sissa pediu ao rei?

01 Sem utilizar fórmulas, qual o número de grãos de trigo presentes em:

ordem	Grãos de trigo na casa	Grãos de trigo até a casa	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

02 Existe algum padrão numérico para determinar o número de grãos de trigo ou o número de grãos de trigo até a casa x? Se existir, qual é são os padrões numéricos?

03 Quantos grãos de trigo há na trigésima segunda casa? E até a trigésima segunda casa?

04 Quantos grãos de trigo há na trigésima quarta casa? Qual o valor encontrado na calculadora?

05 Quantos grãos de trigo há até a trigésima quarta casa? Elabore estratégias para determinar o número exato de grãos de trigo até a trigésima quarta casa com todos os dígitos.

06 Quantos grãos de trigo aproximadamente Sissa pediu ao rei?

07 Elabore estratégias para calcular exatamente (com todos os dígitos) a quantidade de grãos de trigo pedido pelo Sissa.

10 Progressões

A lenda de Sissa: o inventor do xadrez

Detalhes da Imagem: Tigela com farinha, grãos e espigas de trigo sobre mesa de madeira

Uma antiga lenda sobre o xadrez afirma que o inventor do jogo pediu como compensação ao rei por sua invenção uma quantidade muito grande de grãos de trigo. Quão grande? De fato, pelo pedido não convencional, a quantidade não parecia tão chamativa a priori. A conta era fácil: um grão de trigo na primeira casa, dois na seguinte, quatro na próxima e assim sucessivamente, duplicando a quantidade anterior, até completar a última casa.

Toda a corte esperava que Sissa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois grãos de trigo pela segunda casa; quatro grãos de trigo pela terceira casa; oito grãos de trigo pela quarta casa e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a casa de número sessenta e quatro (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas).

Seu pedido provocou risos. O rei meio que contrariado disse-lhe: "Um invento tão brilhante e um pedido tão simples? Escolha uma grande riqueza meu jovem, um de meus castelos, um palácio ou até uma de minhas mulheres! " Todavia Sissa mostrava-se inapelável à proposta do rei, e, como palavra de rei é palavra de rei, este, ainda contrariado, pediu a seus criados que entregassem a Sissa um grande saco de grãos de trigo. Sissa, entretanto, recusou a oferta dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido, nem um grão a mais, nem um grão a menos. O rei pediu então para que seus calculistas fizessem as contas.

Quantos grãos de trigo exatamente Sissa pediu ao rei?

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Orientações Didáticas e Técnicas

Na ClassWiz, ative o separador de dígitos (Config / Sep de Dígitos) e use Tabela para gerar as funções f e g, validando conjecturas antes das fórmulas.

Conecte PG (razão 2) à função exponencial em domínio discreto

01 Sem utilizar fórmulas, qual o número de grãos de trigo presentes em:

ordem	Grãos de trigo na casa	Grãos de trigo até a casa	Adicionando 1
1	$1 = 2^0$	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$
2	$2 = 2^1$	$3 = 2^0 + 2^1$	$4 = 2^2$
3	$4 = 2^2$	$7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$	$8 = 2^3$
4	$8 = 2^3$	$15 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$	$16 = 2^4$

ordem	Grãos de trigo na casa	Grãos de trigo até a casa	Adicionando 1
5	$16 = 2^4$	$31 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$	$32 = 2^5$
6	$32 = 2^5$	$63 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$	$64 = 2^6$
7	$64 = 2^6$	$127 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6$	$128 = 2^7$
8	$128 = 2^7$	255 = 20+21+22+23+24+25+26+27	$256 = 2^8$

02 Existe algum padrão numérico para determinar o número de grãos de trigo ou o número de grãos de trigo até a casa x? Se existir, qual é são os padrões numéricos?

No exercício anterior, percebemos que a quantidade de grãos em cada casa do tabuleiro não cresce de forma linear, mas sim exponencial. Isso significa que cada valor é o dobro do anterior: 1, 2, 4, 8, 16, ... Esse padrão caracteriza uma progressão geométrica (PG) de razão 2.

Assim, na n-ésima casa temos exatamente 2^{n-1} grãos. Esse padrão pode ser associado a uma função exponencial de domínio discreto, em que o número da casa é a variável independente e a quantidade de grãos é a variável dependente.

Além disso, se somarmos as quantidades de grãos até uma determinada casa, surge outro padrão: o total corresponde a $2^n - 1$. Isso reforça a relação entre a PG e a função exponencial, mostrando como a soma parcial cresce rapidamente.

Conexões BNCC

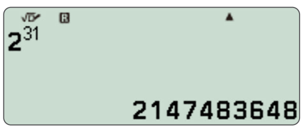
Nesta atividade, espera-se que o estudante reconheça que a sequência apresentada não segue um crescimento linear, mas exponencial. Cada termo é o dobro do anterior, o que caracteriza uma progressão geométrica de razão 2. Assim, o número de grãos da n-ésima casa pode ser expresso por

$$f(x) = 2^{x-1}, \text{ com } x \text{ natural}$$

É importante que o professor conduza a turma à percepção do padrão por meio da observação direta dos números, incentivando a verbalização dos achados: "cada número é duas vezes o anterior". Essa formulação verbal antecede a generalização simbólica.

03 Quantos grãos de trigo há na trigésima segunda casa? E até a trigésima segunda casa?

O número de grãos na 32ª casa:



Ou seja, mais de 2 bilhões de grãos de trigo apenas nessa única casa, ou exatamente 2.147.483.648 grãos de trigo.

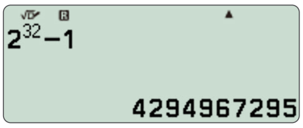
Conexões BNCC

Este exercício mostra claramente o crescimento exponencial: em apenas 32 passos, saímos de 1 grão para bilhões.

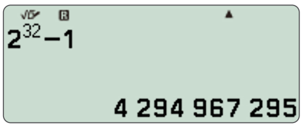
O padrão também se manifesta quando se pede a soma acumulada: até a n-ésima casa temos $g(x) = S(x) = 2^x - 1$. Essa regularidade, quando investigada sem fórmulas prontas, ajuda os estudantes a construir o raciocínio algébrico e a perceber a força da representação exponencial em domínios discretos.

O número de grãos da primeira até a 32ª casa:

② ■ ③ ② ▷ ⊖ ①

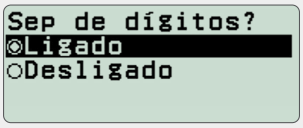


Ou seja, mais de 4 bilhões de grãos de trigo apenas nessa única casa, ou exatamente 4.294.967.295 grãos de trigo.



Separador de dígitos

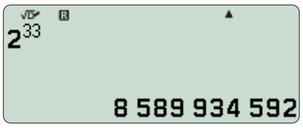
Para ativar a função separadores de dígitos, clique em ☰ OK ⌄ ⌄ ⌄ ⌄ ⌄ ⌄ OK OK



Pressione ⟲ para retornar ao cálculo.

04 Quantos grãos de trigo há na trigésima quarta casa? Qual o valor encontrado na calculadora?

O número de grãos na 34ª casa:

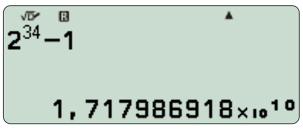


Ou seja, mais de 8 bilhões de grãos de trigo apenas nessa única casa, ou exatamente 8.589.934.592 grãos de trigo.

05 Quantos grãos de trigo há até a trigésima quarta casa? Elabore estratégias para determinar o número exato de grãos de trigo até a trigésima quarta casa com todos os dígitos.

O número de grãos da primeira até a 34ª casa:

② ■ ③ ④ ▷ ⊖ ①



Conexões BNCC

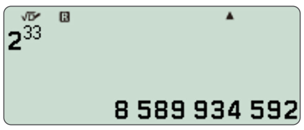
Que outras estratégias podemos definir?

Como estratégia alternativa, é possível usar a relação $2^{34} = (2^{14})^2$. e calcular por etapas. Essa decomposição ajuda a trabalhar com números grandes de forma mais acessível.

Ou seja, aproximadamente $1{,}717986918 \times 10^{10}$. Logo o número exato tem a forma

17 179 869 1XX grãos de trigo,

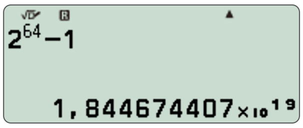
visto que o último dígito na calculadora é incerto. Sabemos que



Logo $2^{34} = 2 \times 2^{33}$ = 17 179 869 184 (combinando o cálculo anterior e calculando o dobro dos últimos dígitos 92). Dessa forma $2^{34} - 1$ = 17 179 869 183 grãos de trigo.

06 Quantos grãos de trigo aproximadamente Sissa pediu ao rei?

O total de grãos pedidos por Sissa (todas as 64 casas)



ou seja, aproximadamente $1{,}844674407 \times 10^{19}$.

Conexões BNCC

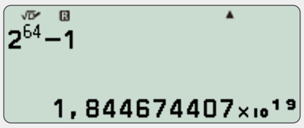
Provoque a turma: "O que cresce mais rápido: somar sempre +1 bilhão ou dobrar? Em quantos passos o 'dobrar' supera qualquer soma fixa?" — isso reforça a associação entre PG (razão 2) e função exponencial em domínio discreto

Somatório (Símbolo)

Esta pode ser uma ótima oportunidade para introduzir o símbolo de somatório Σ (sigma, em grego). Cuidado. Professores têm que ter cuidado com o uso e desenvolvimento do vocabulário (em português e em matemática). O excesso de níveis de simbolismo pode dificultar o aprendizado.

Antes de introduzir este símbolo, faça a seguinte pergunta:

A quantidade de grãos até a quinta casa é

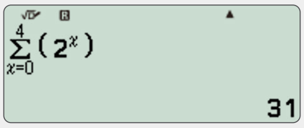


Os matemáticos possuem uma terminologia muito semelhante à expressão acima. Ao invés de usarmos o tradicional S, usamos o S grego, ou seja, Σ (sigma).

Em outras palavras,

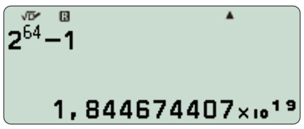
$$\sum_{x=0}^{4} 2^x$$

Logo usando o somatório temos,

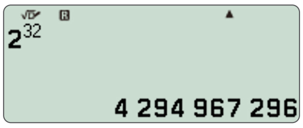


07 Elabore estratégias para calcular exatamente (com todos os dígitos) a quantidade de grãos de trigo pedido pelo Sissa.

A calculadora não fornece todos os dígitos do valor acima, logo vamos simplificar a expressão. Usando propriedade de potenciação, teremos $2^{64} - 1 = (2^{32})^2 - 1$



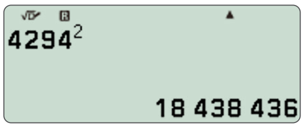
Usando a calculadora teremos

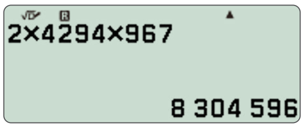


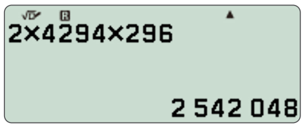
Logo,

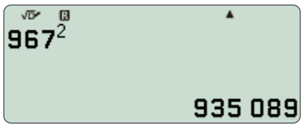
$$
\begin{aligned}
2^{64} = (2^{32})^2 &= (4\ 294\ 967\ 296)^2 \\
&= (4294000000+967000+296)^2 \\
&= (4294 \times 10^6 + 967 \times 10^3 + 296)^2 \\
&= (4294 \times 10^6 + 967 \times 103 + 296)\ (4294 \times 10^6 + 967 \times 10^3 + 296) \\
&= 4294^2 \times 10^{12} + 4294 \times 967 \times 10^9 + 4294 \times 296 \times 10^6 + 967 \times 4294 \times 10^9 + 967^2 \times 10^6 + \\
&\quad + 967 \times 296 \times 10^3 + 296 \times 4294 \times 10^6 + 296 \times 967 \times 10^3 + 296^2
\end{aligned}
$$

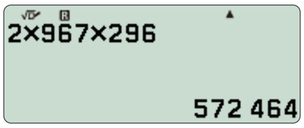
Usando a calculadora científica para fazer os cálculos auxiliares











Dessa forma, teremos

Conexões BNCC

Há outras estratégias para resolver este problema:

- Quadrado de uma soma com três termos
- Diferenças de dois quadrados
- Usando dígitos ocultos da calculadora

```
  18 438 436 000 000 000 000
     8 304 596 000 000 000
         2 542 048 000 000
             935 089 000 000
                 572 464 000
+                     87 616
------------------------------
  18 446 744 073 709 551 616
```

Logo Sissa pediu ao rei a quantidade de 18 446 744 073 709 551 615 grãos de trigo.

CASIO EDUCAÇÃO

Ampliação

A lenda de Sissa: o inventor do xadrez

Detalhes da Imagem: Tigela com farinha, grãos e espigas de trigo sobre mesa de madeira

Uma antiga lenda sobre o xadrez afirma que o inventor do jogo pediu como compensação ao rei por sua invenção uma quantidade muito grande de grãos de trigo. Quão grande? De fato, pelo pedido não convencional, a quantidade não parecia tão chamativa a priori. A conta era fácil: um grão de trigo na primeira casa, dois na seguinte, quatro na próxima e assim sucessivamente, duplicando a quantidade anterior, até completar a última casa.

Toda a corte esperava que Sissa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois grãos de trigo pela segunda casa; quatro grãos de trigo pela terceira casa; oito grãos de trigo pela quarta casa e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a casa de número sessenta e quatro (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas). Seu pedido provocou risos. O rei meio que contrariado disse-lhe: "Um invento tão brilhante e um pedido tão simples? Escolha uma grande riqueza meu jovem, um de meus castelos, um palácio ou até uma de minhas mulheres! " Todavia Sissa mostrava-se inapelável à proposta do rei, e, como palavra de rei é palavra de rei, este, ainda contrariado, pediu a seus criados que entregassem a Sissa um grande saco de grãos de trigo. Sissa, entretanto, recusou a oferta dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido, nem um grão a mais, nem um grão a menos. O rei pediu então para que seus calculistas fizessem as contas.

Quantos grãos de trigo exatamente Sissa pediu ao rei?

01 Quantos quilos/toneladas teria todos os grãos de trigos que Sissa pediu ao rei?
A Conab (Companhia Nacional de Abastecimento) estimou uma produção de aproximadamente 7,81 milhões de toneladas, apesar de uma redução de 16,7 % na área plantada (cerca de 2,55 milhões de hectares), apoiada por condições climáticas mais favoráveis que mantiveram o volume estável em relação à safra anterior.Outros dados, como do USDA, projetaram até 9,6 milhões de toneladas para o ano-safra 2024/25 (refere-se ao plantio feito em 2024 e à colheita realizada ao longo do 2º semestre de 2024, com os números valendo para o consumo e comércio até meados de 2025).

02 Se contássemos um grão de trigo por segundo, quanto tempo levaríamos para contar todos os trigos que Sissa solicitou ao rei?

CASIO EDUCAÇÃO

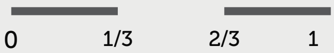
11 Progressões Numéricas
Fractais: o conjunto de Cantor

Detalhes da Imagem: Detalhe da textura de um brócolis romanesco.

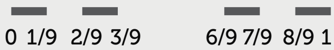
Segundo o dicionário, um fractal é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, repetem-se em qualquer escala. Com base nessa definição, podemos afirmar que os brócolis romanescos da foto acima é um fractal, pois sua aparência não muda sob mudanças de escala.
O conjunto de Cantor é um dos exemplos clássicos de conjunto fractal e é construído a partir de um processo iterativo simples, mas que gera uma estrutura muito rica. Eis como ele é definido:

Passo inicial
Começamos com o intervalo fechado [0, 1]

Primeira iteração
Em seguida, dividimos esse intervalo em três partes iguais e retiramos a parte do meio, que vai de 1/3 a 2/3. Sobram então dois pedaços: o que vai de 0 a 1/3 e o que vai de 2/3 a 1.



Segunda iteração
No passo seguinte, repetimos o mesmo procedimento em cada um desses intervalos: dividimos cada pedaço em três partes iguais e retiramos o terço do meio. Assim, de 0 a 1/3 ficamos com dois intervalos menores (de 0 a 1/9 e de 2/9 a 1/3), e o mesmo acontece com o intervalo de 2/3 a 1.



Se continuarmos indefinidamente, sempre retirando o terço central de cada intervalo que sobra, obtemos o conjunto de Cantor. O curioso é que, embora vamos retirando pedaços sem parar, ainda assim sobra um conjunto infinito de pontos.

01 Reproduza, no quadriculado abaixo, a figura do texto e acrescente a próxima iteração do Conjunto de Cantor.

02 Na construção do Conjunto de Cantor, em cada iteração, o terço médio de cada subintervalo é removido, e os segmentos restantes formam novas subdivisões. Liste os subintervalos que permanecem na 3ª iteração, escrevendo suas extremidades como frações sem simplificação. Quantos subintervalos você acha que existirão na 4ª iteração?

03 Com base na definição do Conjunto de Cantor, complete a seguinte tabela:

iteração	nº de segmentos de reta	comprimento de cada segmento de reta	soma de todos os segmentos de reta da iteração
1	2	1/3	2/3
2	4	1/9	4/9
3			
4			
5			
6			
7			
8			

04 Analisando a tabela do item anterior, responda às questões abaixo:

a) Apresente uma lei de recorrência que permita conhecer o número de segmentos que se obtém na k–ésima iteração?

b) Apresente uma que permita conhecer o comprimento de cada segmento na k–ésima iteração.

c) Apresente uma lei de formação na qual seja possível determinar a soma de todos os segmentos que resultam na k–ésima iteração?

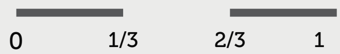
11 Progressões
Fractais: o conjunto de Cantor

Detalhes da Imagem: Detalhe da textura de um brócolis romanesco.

Segundo o dicionário, um fractal é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, repetem-se em qualquer escala. Com base nessa definição, podemos afirmar que os brócolis romanescos da foto acima é um fractal, pois sua aparência não muda sob mudanças de escala.
O conjunto de Cantor é um dos exemplos clássicos de conjunto fractal e é construído a partir de um processo iterativo simples, mas que gera uma estrutura muito rica. Eis como ele é definido:

Passo inicial
Começamos com o intervalo fechado [0, 1]

Primeira iteração
Em seguida, dividimos esse intervalo em três partes iguais e retiramos a parte do meio, que vai de 1/3 a 2/3. Sobram então dois pedaços: o que vai de 0 a 1/3 e o que vai de 2/3 a 1.



Segunda iteração
No passo seguinte, repetimos o mesmo procedimento em cada um desses intervalos: dividimos cada pedaço em três partes iguais e retiramos o terço do meio. Assim, de 0 a 1/3 ficamos com dois intervalos menores (de 0 a 1/9 e de 2/9 a 1/3), e o mesmo acontece com o intervalo de 2/3 a 1.

Se continuarmos indefinidamente, sempre retirando o terço central de cada intervalo que sobra, obtemos o conjunto de Cantor. O curioso é que, embora vamos retirando pedaços sem parar, ainda assim sobra um conjunto infinito de pontos.

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

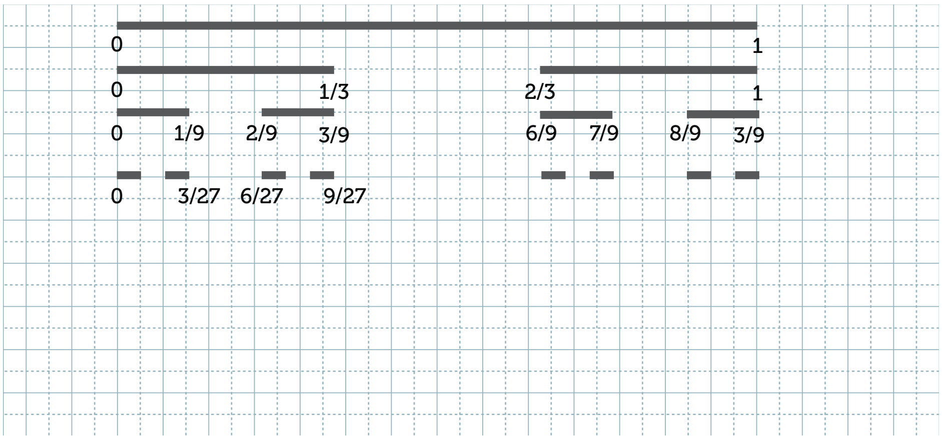
Matemática e suas tecnologias

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Orientações Didáticas e Técnicas

Comece lembrando que, a cada passo, retira-se o terço central (intervalo aberto) e preservam-se as extremidades.
Peça que as extremidades sejam sempre escritas sem simplificação, com denominador 3^n (na 3ª iteração, 27; na 4ª, 81), para manter o padrão visível. O que acontece se simplificamos?
Conduza a generalização: após n iterações há 2^n intervalos, cada um de comprimento 3^{-n}; prevejam $n=4$ antes de listar.
Faça perguntas metacognitivas ("como você sabe que não faltou nenhum intervalo?", "o que se perde ao simplificar?") para justificar o raciocínio.
Monitore erros típicos (escolher o terço errado, tratar o removido como fechado, ou simplificar frações) e intervenha com exemplos curtos.

01 Reproduza, no quadriculado abaixo, a figura do texto e acrescente a próxima iteração do Conjunto de Cantor.



Conexões BNCC

É fundamental que os estudantes utilizem representações visuais do Conjunto de Cantor para compreender seu processo de construção em cada iteração. Promova discussões em grupo para que possam compartilhar suas observações sobre o padrão de divisão ternária e a formação dos subintervalos a cada etapa.

Antes de iniciar a atividade, estimule o pensamento funcional com perguntas desafiadoras, como:

Quantos segmentos existirão na 3ª iteração?

Qual é o denominador comum das frações que representam os extremos dos subintervalos?

Por que é interessante manter as frações sem simplificação?

02 Na construção do Conjunto de Cantor, em cada iteração, o terço médio de cada subintervalo é removido, e os segmentos restantes formam novas subdivisões. Liste os subintervalos que permanecem na 3ª iteração, escrevendo suas extremidades como frações sem simplificação. Quantos subintervalos você acha que existirão na 4ª iteração?

Ideia-chave. A cada iteração retiramos o terço central de cada subintervalo restante. Após n iterações, ficam 2^n subintervalos, cada um com comprimento 3^{-n}.

Lista ordenada (3ª iteração, 8 subintervalos)

[0/27, 1/24]; [2/27, 3/27]; [6/27, 7/27]; [8/27, 9/27]; [18/27,19/27]; [20/27, 21/27]; [24/27, 25/27] ; [26/27, 27/27].

Cada intervalo da 3ª iteração se divide em dois na 4ª. Como havia 8 na 3ª, haverá 16 subintervalos na 4ª iteração (regra geral: 2^n após n iterações).

Conexões BNCC

Perguntas metacognitivas (para o debate em grupo).

"Como você sabe que listou todos os intervalos da 3ª iteração?"

"Qual regra gera sempre o próximo passo sem desenhar tudo?"

"Onde aparece o número 3 na sua escrita? E o número 2?"

"O que muda se você simplificar as frações? O padrão continua visível?"

Conexões BNCC

Ponte para a 4ª iteração (antecipação de padrões).

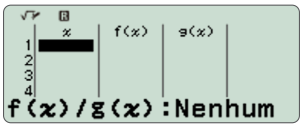
Regra geral: após n iterações, o que implica 2^n intervalos, cada um de comprimento 3^{-n}

Sugira que os grupos prevejam os numeradores (em base 27) que ficarão na 4ª (sem calcular tudo), com a lógica "dois ficam, um sai" em cada bloco.

03 Com base na definição do Conjunto de Cantor, complete a seguinte tabela:

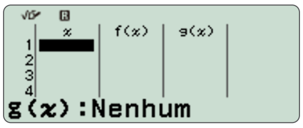
Vamos explorar com a calculadora científica, com o auxílio das funções $f(x) = 2^x$ e a função $g(x) = 3^{-x}$ e criar uma tabela de valores x=1, 2, 3, ... , 10.

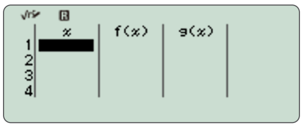
OK



(⋯) (∨) (OK) (OK) (2) (■□) (x) (EXE)

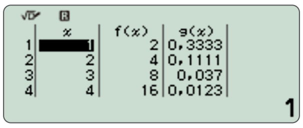
(⋯) (∨) (OK) (∨) (OK) (3) (■□) (−) (x) (EXE)

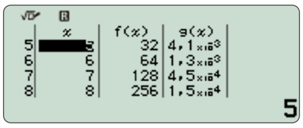




(⋯) (OK) (1) (EXE) (1) (0) (EXE) (1) (EXE) (EXE)

(⩔)



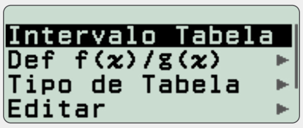


Tipo de Tabela f(x)/g(x)

No aplicativo Tabela, você pode customizar para aparecer as colunas $f(x)$, $g(x)$ e o tipo $f(x)$ / $g(x)$.

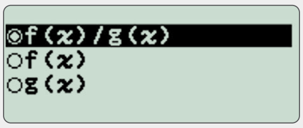
No exemplo ao lado, definimos para mostrar apenas $f(x)$. No aplicativo Tabela, pressione

(⋯)



Pressione

(∨) (∨) (OK) (OK)



Pressione (↺) para voltar para a Tabela.

No aplicativo Calcular da calculadora, podemos explorar as funções f e g.

(⌂) (⌂)

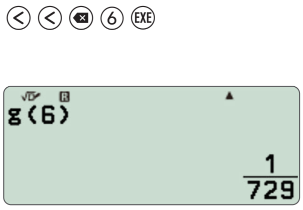
OK

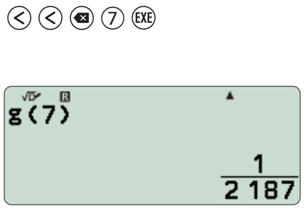
(f(x)) (∨) (OK) (4) ()) (EXE)

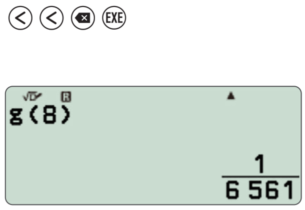
(<) (<) (⌫) (5) (EXE)

Funções f(x)/g(x)

As funções $f(x)$ e $g(x)$ podem ser usadas em outros aplicativos da calculadora científica como o aplicativo Calcular.







Dessa forma, podemos completar a tabela

iteração	nº de segmentos de reta	comprimento de cada segmento de reta	soma de todos os segmentos de reta da iteração
1	2	1/3	2/3
2	4	1/9	4/9
3	8	1/27	8/27
4	16	1/81	16/81
5	32	1/243	32/243
6	64	1/729	64/729
7	128	1/2187	128/2187
8	256	1/6561	256/6561

04 Analisando a tabela do item anterior, responda às questões abaixo:

a) Apresente uma lei de recorrência que permita conhecer o número de segmentos que se obtém na k–ésima iteração?

Em cada passo a quantidade de segmentos simplesmente dobra: começamos com 1 segmento em $k = 0$ (o intervalo [0, 1]); após a 1ª remoção ficam 2; depois 4; depois 8... Assim, a lei recorrente é "o próximo é o dobro do anterior" ($N_k = 2N_{k-1}$, com $N_0=1$) e, em forma fechada $N_k = 2^k$.

b) Apresente uma que permita conhecer o comprimento de cada segmento na k–ésima iteração.

Comprimento de cada segmento na k-ésima iteração.

O comprimento de cada um desses segmentos: 3^{-k}.

c) Apresente uma lei de formação na qual seja possível determinar a soma de todos os segmentos que resultam na k–ésima iteração?

A soma total dos segmentos na k-ésima iteração.

O comprimento de cada um desses segmentos: $(2/3)^{-k}$.

12 Função Linear e Afim
Preparação para maratona

Detalhes da Imagem: Corredores de maratona com movimento borrado em uma cidade

Ao longo de todo o ano, milhões de pessoas em todo o mundo se preparam para participar de uma maratona.

Conta-se que o soldado Filípides correu da praia de Maratona (Grécia) até Atenas para anunciar a vitória contra os persas. A distância que teve que percorrer, entre 35 e 40 quilômetros (entre 21 e 24 milhas) dependendo do caminho que escolhesse, foi recuperada nos Jogos Olímpicos de 1896, como uma homenagem aquele soldado e a Grécia antiga. No entanto, a distância atual desta prova (42.195m) é a mesma introduzida em 1908 nos primeiros Jogos Olímpicos de Londres: a distância do Palácio de Windsor ao Estádio Olímpico.

Em 1921, a IAAF (Associação Internacional de Federações de Atletismo) adotou esta distância para o evento mais popular na corrida de longa distância, ao invés da distância percorrida pelo mítico Filípides que, se realmente existisse, deveria ter percorrido a distância entre Atenas e Esparta e voltado, antes de cair morto, o que faz dele o primeiro ultramaratonista da história

01 Sara e Pablo pertencem ao mesmo clube de atletismo. Como faltam apenas algumas semanas para a maratona, eles saem para treinar todas as tardes fazendo o mesmo percurso. Sara corre a uma velocidade de 12km/h e Pablo de 8km/h. Na sexta-feira, quando Sara decide sair para treinar, Pablo já está correndo há uma hora.

a) Construa uma tabela com as funções que descrevem a posição de Sara e Pablo e investigue se há a possibilidade que eles podem se encontrar em algum ponto do caminho. Investigue quem está na frente nas primeiras 5h com intervalos de 15 min ou 1/4h.

02 Se a resposta do exercício anterior for afirmativa, quantos quilômetros eles terão percorrido até se encontrarem? Quanto tempo terá se passado desde o início do treino?

03 O recorde mundial da maratona masculina foi estabelecido por Kelvin Kiptum, com 2:00:35 na Maratona de Chicago em 8 de outubro de 2023, o que corresponde a um ritmo médio de 2 min 51 s/km (aprox. 20,99 km/h). O recorde mundial atual feminino foi atingido por Ruth Chepngetich, com 2:09:56 na Maratona de Chicago em 2024, ritmo médio de 3 min 05 s/km. Antes dela, Tigst Assefa detinha o recorde com 2:11:53 no Berlin Marathon 2023, ritmo médio de 3 min 07,5 s/km.

Os corredores de elite que aspiram a medalhas costumam correr a uma velocidade próxima de 3 minutos por quilômetro. Sara ou Pablo podem aspirar a uma medalha? Justifique.

12 Função Linear e Afim
Preparação para maratona

Detalhes da Imagem: Corredores de maratona com movimento borrado em uma cidade

Ao longo de todo o ano, milhões de pessoas em todo o mundo se preparam para participar de uma maratona.

Conta-se que o soldado Filípides correu da praia de Maratona (Grécia) até Atenas para anunciar a vitória contra os persas. A distância que teve que percorrer, entre 35 e 40 quilômetros (entre 21 e 24 milhas) dependendo do caminho que escolhesse, foi recuperada nos Jogos Olímpicos de 1896, como uma homenagem aquele soldado e a Grécia antiga. No entanto, a distância atual desta prova (42.195m) é a mesma introduzida em 1908 nos primeiros Jogos Olímpicos de Londres: a distância do Palácio de Windsor ao Estádio Olímpico.

Em 1921, a IAAF (Associação Internacional de Federações de Atletismo) adotou esta distância para o evento mais popular na corrida de longa distância, em vez da distância percorrida pelo mítico Filípides que, se realmente existisse, deveria ter percorrido a distância entre Atenas e Esparta e voltado, antes de cair morto, o que faz dele o primeiro ultramaratonista da história

Calculadora científica
fx-82LA CW ou fx-991LA CW

Matemática e suas tecnologias

EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Orientações Didáticas e Técnicas

Explicite as suposições do modelo (mesmo percurso, velocidades constantes, sem paradas) e peça que os alunos listem essas hipóteses.
Use o aplicativo Tabela da calculadora para comparar as funções posição de Sara e Pablo.
Oriente os alunos a identificar o encontro pela igualdade das posições, destacando o significado físico desse resultado.
Explore a interpretação temporal: o tempo decorrido é diferente para cada corredor.
Promova perguntas metacognitivas: "Como você sabe que houve encontro?", "O que aconteceria se mudássemos o ponto de largada?""E se os sentidos fossem opostos?" e prevejam resultados
Finalize discutindo limites do modelo (fadiga, variação de ritmo), promovendo visão crítica e realista.

01 Sara e Pablo pertencem ao mesmo clube de atletismo. Como faltam apenas algumas semanas para a maratona, eles saem para treinar todas as tardes fazendo o mesmo percurso. Sara corre a uma velocidade de 12km/h e Pablo de 8km/h. Na sexta-feira, quando Sara decide sair para treinar, Pablo já está correndo há uma hora. Você acha que eles podem se encontrar em algum ponto do caminho? Justifique sua resposta.

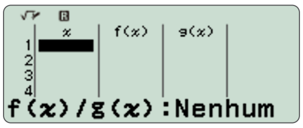
f(x) Movimento Uniforme $S= S_0+vt$

A função que relaciona a posição (S) de um móvel em movimento uniforme (movimento com velocidade constante) com o tempo (t) é chamada de função horária do espaço em relação ao tempo. O modelo matemático que define essa função é: $S= S_0+vt$, em que S_0 é o espaço inicial do móvel (lugar que ele ocupa no instante t = 0) e v é sua velocidade escalar.

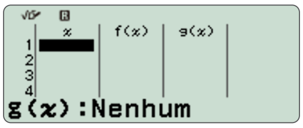
Considere que ambos seguem o mesmo percurso na mesma direção; esta suposição deve ser explicitada no enunciado. Vamos explorar na calculadora no aplicativo Tabela.
Seja f, a função que descreve a posição de Sara e g, a função posição que descreve a posição de Pablo, então como Pablo já está correndo há uma hora e supondo que ele mantém uma velocidade constante,

$f(x) = 8 + 8x$, a posição de Sara pode ser descrita com a função $g(x) = 12x$.

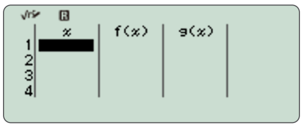
(OK)



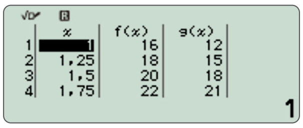
(⋯) (∨) (OK) (OK) (8) (+) (8) (x) (EXE)



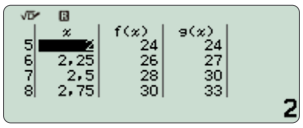
(⋯) (∨) (OK) (∨) (OK) (1) (2) (x) (EXE)



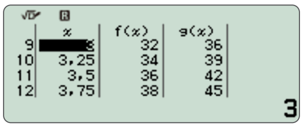
(⋯) (OK) (1) (EXE) (5) (EXE) (0) (.) (2) (5) (EXE) (EXE)



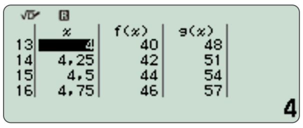
(⩔)



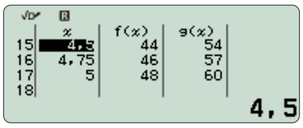
(⩔)



(⩔)



(⩔)

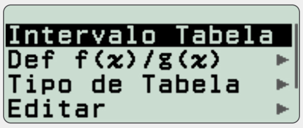


Tipo de Tabela f(x)/g(x)

No aplicativo Tabela, você pode customizar para aparecer as colunas $f(x)$, $g(x)$ e o tipo $f(x)$ / $g(x)$.

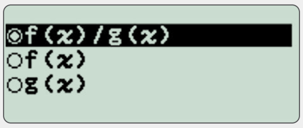
No exemplo ao lado, definimos para mostrar apenas $f(x)$. No aplicativo Tabela, pressione

(⋯)



Pressione

(∨) (∨) (OK) (OK)



Pressione (↺) para voltar para a Tabela.

Percebemos que Pablo está a frente de Sara nas primeiras duas horas (momento de encontro) e depois da segunda hora Sara está a frente de Pablo e não há mais encontro até $t = 5$h.

Conexões BNCC

Explitar suposições do modelo: mesma direção, mesma origem espacial, ausência de paradas, velocidade constante. Peça aos alunos para listá-las; depois, peça que alterem uma suposição (p.ex., sentidos opostos, ou largadas em locais diferentes) e prevejam o efeito.

Metacognição:
"Como você sabe que o encontro ocorreu?"
"Que grandezas são lineares aqui? O que deixaria de ser linear?"
"Qual unidade facilita os cálculos? Por quê?"

02 Se a resposta do exercício anterior for afirmativa, quantos quilômetros eles terão percorrido até se encontrarem? Quanto tempo terá se passado desde o início do treino?

Desde a largada de Sara: $t = 2$ h; distância de cada um no ponto de encontro: g(t) = 12 x 2 = 24km.

Desde a largada de Pablo: $t = 3$ h; distância: 8 x 3 = 24 km.

Conexões BNCC

Destacar que igualdade de posições significa "mesmo ponto do percurso", e que tempos "decorridos" são diferentes para cada atleta.

03 O recorde mundial da maratona masculina foi estabelecido por Kelvin Kiptum, com 2:00:35 na Maratona de Chicago em 8 de outubro de 2023, o que corresponde a um ritmo médio de 2 min 51 s/km (aprox. 20,99 km/h). O recorde mundial atual feminino foi atingido por Ruth Chepngetich, com 2:09:56 na Maratona de Chicago em 2024, ritmo médio de 3 min 05 s/km. Antes dela, Tigst Assefa detinha o recorde com 2:11:53 no Berlin Marathon 2023, ritmo médio de 3 min 07,5 s/km.

Os corredores de elite que aspiram a medalhas costumam correr a uma velocidade próxima de 3 minutos por quilômetro. Sara ou Pablo podem aspirar a uma medalha? Justifique.

Resposta esperada:

Sara corre a 12 km/h com um ritmo de 5 min/km.

Pablo corre a 8 km/h com um ritmo de 7,5 min/km.

Ambos estão bem abaixo do desempenho necessário (3 min/km ou menos). Logo, não podem aspirar a medalha.

Conexões BNCC

Esse cálculo considera apenas modelo afim (velocidade constante), mas o corredor real enfrenta fadiga, mudanças de ritmo, estratégias, influência de pacemakers, calçado de alta tecnologia, condições climáticas e psicológicas. Identifique um desses fatores e discuta como ele poderia acelerar ou desacelerar o ritmo num modelo mais realista

CASIO
EDUCAÇÃO

CASIO BRASIL
Rua Loefgren, 1057 - 3° e 4° andar
Vila Clementino,
São Paulo, SP
www.casioeducacao.com.br
educacao@casio.com.br